

# Lezioni di fisica corso ITS 2015/16

A.Smailagić

# Contents

<b>1</b>	<b>Prerequisiti matematici</b>	<b>1</b>
1.1	Diverse basi ortogonali . . . . .	1
1.1.1	Definizione del prodotto scalare e vettoriale . . . . .	4
1.1.2	Rappresentazione dei numeri complessi . . . . .	5
1.1.3	Funzioni iperboliche . . . . .	6
1.1.4	Oscillazioni smorzate . . . . .	7
1.1.5	Trasformata di Fourier . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Corrente elettrica</b>	<b>11</b>
2.1	Descrizione microscopica . . . . .	11
2.2	Velocità di deriva . . . . .	13
2.2.1	Campi elettrici costanti . . . . .	13
2.2.2	Campi variabili nel tempo . . . . .	15
2.3	Circuiti elettrici . . . . .	16
2.3.1	Circuito RC . . . . .	17
2.3.2	Circuito RL . . . . .	18
2.4	Circuito RLC in regime AC . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Il campo magnetico</b>	<b>31</b>
3.1	Forza di Lorentz . . . . .	33
3.1.1	Forza tra due correnti . . . . .	35
3.1.2	Movimento di una carica nel campo magnetico . . . . .	35
3.2	Induzione magnetica . . . . .	37
3.2.1	Coefficienti di induzione magnetica . . . . .	39
3.3	Magnetismo atomico . . . . .	45
3.3.1	Frequenza di Larmor . . . . .	45
3.3.2	Precessione di Larmor . . . . .	47
3.4	Magnetismo nucleare . . . . .	47
3.4.1	Risonanza magnetica in medicina . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Moto ondulatorio</b>	<b>51</b>
4.1	Sovrapposizione delle onde . . . . .	54
4.2	Onde elettromagnetiche . . . . .	58
4.3	Onde elettromagnetiche nella materia . . . . .	60
4.3.1	Teoria della dispersione . . . . .	61
4.3.2	Onde piane nei non-conduttori . . . . .	62
4.3.3	Onde piane nei metalli . . . . .	62
4.4	Onde elettromagnetiche in due dimensioni . . . . .	65

## List of Figures

1	<i>Rappresentazione vettoriale di un numero complesso</i> . . . . .	6
---	---	---

2	$\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$ . . . . .	7
3	La corrente a regime nel circuito <i>RL</i> . . . . .	19
4	La corrente a regime nel circuito <i>RL</i> . . . . .	19
5	Andamento temporale della corrente nel circuito <i>RL</i> . . . . .	20
6	Andamento temporale della corrente nel circuito <i>RL</i> . . . . .	20
7	Fase transitoria della corrente nel circuito <i>RLC</i> . . . . .	21
8	Rappresentazione vettoriale delle impedenze del circuito <i>RLC</i> . . . . .	25
9	circuito <i>RLC</i> in parallelo . . . . .	28
10	Circuito <i>LC</i> in regime <i>AC</i> . . . . .	28
11	circuito <i>RLC</i> con due armoniche . . . . .	29
12	Induzione magnetica in una spira in rotazione . . . . .	40
13	Induzione magnetica in una sbarra in movimento . . . . .	40
14	Induzione magnetica tra due spire . . . . .	41
15	Induzione magnetica tra una spira ed un filo . . . . .	41
16	. . . . .	50
17	Spostamento spaziale di un'onda sinusoidale . . . . .	53
18	Interferenza di due onde sinusoidali $(\sin(6.3 \cdot x + 6.1 \cdot 0)] + \sin(5.7x + 5.9 \cdot 0))/2 =$ $\cos(0.3 \cdot x + 0.1 \cdot 0) \sin(6 \cdot x + 6 \cdot 0)$ . . . . .	56
19	Polarizzazione ellittica delle onde elettromagnetiche . . . . .	67

## 1 Prerequisiti matematici

Per poter seguire questo corso in modo proficuo è necessario avere le seguenti conoscenze matematiche

- vettori
- funzioni trigonometriche
- numeri complessi
- elementi del calcolo differenziale ed integrale

### 1.1 Diverse basi ortogonali

Un vettore può essere descritto in una base dello spazio  $n$ -dimensionale, caratterizzata dai vettori unitari  $\vec{e}_i$ , come

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

Il simbolo  $\delta_{ij}$  si chiama Kronecker delta definito come

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Esempio delle basi comunemente usate

- base polare in due dimensioni con vettori unitari  $(\vec{\rho}_0, \vec{\varphi}_0)$ , con l'angolo  $\varphi$  misurato in senso **antiorario** dall'asse x, si usa nei casi di simmetria circolare

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ \vec{\varphi}_0 &= -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \\ \vec{\rho}_0 &= \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \\ \vec{x} &\equiv \rho \vec{\rho}_0 = x \vec{i} + y \vec{j} \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ d^2 x &= \rho d\rho d\varphi \end{aligned}$$

- base cilindrica in tre dimensioni con vettori unitari  $(\vec{\rho}_0, \vec{\varphi}_0, \vec{k})$  si usa nei casi di simmetria cilindrica

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \\ \vec{\varphi}_0 &= -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \\ \vec{\rho}_0 &= \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \\ \vec{x} &\equiv \rho \vec{\rho}_0 + z \vec{k} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ d^3 x &= \rho d\rho d\varphi dz \end{aligned}$$

- base sferica in tre dimensioni con vettori unitari  $(\vec{r}_0, \vec{\varphi}_0, \vec{\theta}_0)$ , con l'angolo  $\theta$  misurato dall'asse z, si usa nei casi di simmetria sferica

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi \sin \theta \\
 y &= r \sin \varphi \sin \theta \\
 z &= r \cos \theta \\
 \vec{r}_0 &= \sin \theta \vec{\rho}_0 + \cos \theta \vec{k} \\
 \vec{\varphi}_0 &= -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \\
 \vec{\theta}_0 &= \cos \theta \vec{\rho}_0 - \sin \theta \vec{k} \\
 \vec{x} &\equiv r \vec{r}_0 = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \\
 r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\
 d^3x &= r^2 dr d\varphi d\theta
 \end{aligned}$$

Un vettore  $\vec{a}$  scritto in una delle basi ha la forma

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\
 &= a_\rho \vec{\rho}_0 + a_\varphi \vec{\varphi}_0 + a_z \vec{k} \\
 &= a_r \vec{r}_0 + a_\varphi \vec{\varphi}_0 + a_\theta \vec{\theta}_0
 \end{aligned}$$

e le componenti in diverse basi sono legate come segue

- base polare

$$\begin{aligned}
 a_\rho &= a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi \\
 a_\varphi &= -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi \\
 a_z &= a_z
 \end{aligned}$$

- base sferica

$$\begin{aligned}
 a_r &= (a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi) \sin \theta + a_z \cos \theta \\
 a_\varphi &= -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi \\
 a_\theta &= (a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi) \cos \theta - a_z \sin \theta
 \end{aligned}$$

mentre gli operatori differenziali hanno la forma

- base polare

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} &= \vec{\rho}_0 \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \\
 \nabla^2 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
 \end{aligned}$$

– base sferica

$$\vec{\nabla} = \vec{r}_0 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

### 1.1.1 Definizione del prodotto scalare e vettoriale

- prodotto scalare

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i,j=1}^3 a_i \cdot b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \sum_i a_i \cdot b_i$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

simbolo  $\delta_{ij}$  si chiama Kronecker delta.

- prodotto vettoriale

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |a| \cdot |b| \sin \alpha \vec{c}_0$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j=1}^3 a_i \cdot b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i \cdot b_j \cdot \vec{e}_k$$

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & i \neq j \neq k \\ 1 & i = j = k \end{cases}$$

simbolo  $\epsilon_{ijk}$  si chiama tensore antisimmetrico.

Un esempio

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

- prodotto misto è un volume

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \sum_{i,j=1}^3 a_i \cdot b_j \cdot c_k (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i \cdot b_j \cdot c_k$$

- prodotto vettoriale doppio

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

### 1.1.2 Rappresentazione dei numeri complessi

Un numero complesso è caratterizzato da **due** unità ( $1, i = \sqrt{-1}$ ) e si scrive

$$\begin{aligned} z &= x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z \\ z &= |z| e^{i\varphi} \rightarrow \text{Forma di Eulero} \\ x &= |z| \cos \varphi \\ y &= |z| \sin \varphi \\ |z|^2 &= x^2 + y^2 \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

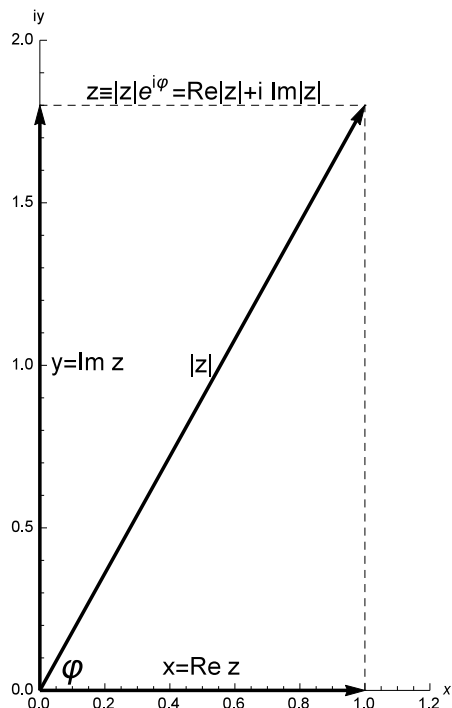
Un numero complesso si può rappresentare come un vettore  $\vec{z}$  nel piano **complesso** ( $x, iy$ ) e le operazioni si svolgono come con i vettori. Per esempio la somma di due numeri complessi  $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$   $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{z} &= \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \\ |z|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \cos \varphi \end{aligned}$$

dove  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  rappresenta lo spostamento di fase tra due numeri. Altro modo di fare è analitico come segue

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1| e^{i\varphi_1} = \operatorname{Re} z_1 + i \operatorname{Im} z_1 \\ z_2 &= |z_2| e^{i\varphi_2} = \operatorname{Re} z_2 + i \operatorname{Im} z_2 \\ z &\equiv z_1 + z_2 = |z| e^{i\phi} \\ |z|^2 &\equiv z\bar{z} = (|z_1| e^{i\varphi_1} + |z_2| e^{i\varphi_2}) (|z_1| e^{-i\varphi_1} + |z_2| e^{-i\varphi_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \tan \varphi &\equiv \frac{\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2}{\operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2} = \frac{|z_1| \sin \varphi_1 + |z_2| \sin \varphi_2}{|z_1| \cos \varphi_1 + |z_2| \cos \varphi_2} \end{aligned}$$

Usando numeri complessi si possono ottenere formule utili per l'addizione di due onde

Figure 1: *Rappresentazione vettoriale di un numero complesso*

(vedi più avanti)

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i[(\alpha+\beta)/2+(\alpha-\beta)/2]} + e^{i[(\alpha+\beta)/2-(\alpha-\beta)/2]}$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i(\alpha+\beta)/2}$$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i(\alpha+\beta)/2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

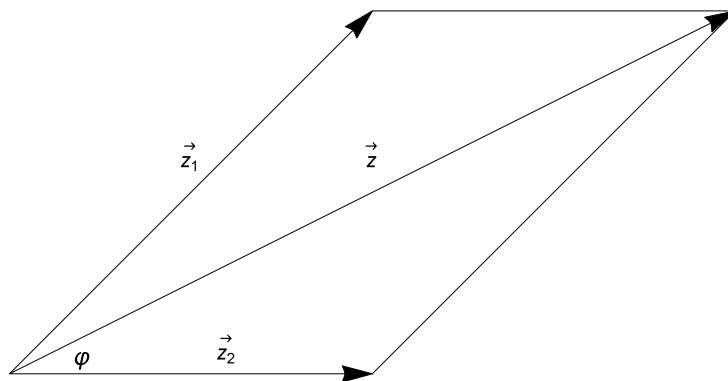
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$a \sin \alpha + b \sin \beta = (a + b) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + (a - b) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

### 1.1.3 Funzioni iperboliche

le definizioni di base sono seno iperbolico e coseno iperbolico



Figure 2:  $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$ 

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sono funzioni reali che per la variabile **complessa**  $x = i\varphi$  si riducono alle funzioni trigonometriche  $\sinh i\varphi = i \sin \varphi$  e  $\cosh i\varphi = \cos \varphi$ . Le approssimazioni per  $x \leq 1$  sono, usando lo sviluppo  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ ,

$$\sinh x \approx x$$

$$\cosh x \approx 1$$

#### 1.1.4 Oscillazioni smorzate

Equazione di un oscillatore armonico smorzato sottoposto ad una forza esterna

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + kx = F e^{i\omega t} \quad (1)$$

Il fattore  $\gamma$  si chiama coefficiente di smorzamento,  $k$  è la costante elastica,  $m$  la massa ed  $F e^{i\omega t}$  la forza **armonica esterna**. Guardiamo prima la soluzione dell'equazione omogenea  $F = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x \\
x(t) &= A e^{i\alpha_1 t} + B e^{i\alpha_2 t} \\
0 &= \alpha^2 - i\gamma\alpha - \omega_0^2 \\
\alpha_{1,2} &= \frac{i\gamma}{2} (1 \pm \Omega) \\
\gamma\Omega &= \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} \\
\omega_0^2 &= \frac{k}{m}
\end{aligned}$$

se si impongono le **condizioni iniziali**  $x(t=0) = x_0$  e  $\dot{x}(t=0) = v_0$  si trovano le condizioni per risolvere le costanti di integrazione  $A, B$

$$\begin{aligned}
x_0 &= A + B \\
v_0 &= i\alpha_1 A + i\alpha_2 B \\
A &= \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_2 x_0 + i v_0) \\
B &= -\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_1 x_0 + i v_0)
\end{aligned}$$

la soluzione generale è

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t/2} \left[ x_0 \cosh(\gamma\Omega t/2) + \frac{1}{\gamma\Omega} (x_0 \gamma + 2 v_0) \sinh(\gamma\Omega t/2) \right]} \quad (2)$$

Possiamo avere tre diverse situazioni

$$1. \quad \gamma/2 \leq \omega_0 \rightarrow \Omega = i|\Omega|$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\gamma t/2} \left[ x_0 \cos(\gamma|\Omega| t/2) + \frac{1}{\gamma|\Omega|} (x_0 \gamma + 2 v_0) \sin(\gamma|\Omega| t/2) \right] \\
&= A \sin(\gamma|\Omega| t/2 + \varphi) \\
A &= \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{x_0 \gamma + 2 v_0}{\gamma|\Omega|} \right)^2} \\
\tan \varphi &= \frac{x_0 \gamma |\Omega|}{x_0 \gamma + 2 v_0}
\end{aligned}$$

questa soluzione descrive oscillazioni smorzate

$$2. \quad \gamma/2 \geq \omega_0 \rightarrow \Omega = |\Omega|$$

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} \left[ x_0 \cosh(\gamma|\Omega| t/2) + \frac{1}{\gamma|\Omega|} (x_0 \gamma + 2 v_0) \sinh(\gamma|\Omega| t/2) \right]$$

Sovra-smorzamento. Il sistema si smorza in modo monotono **senza** oscillare.

$$3. \quad \gamma/2 = \omega_0 \rightarrow \Omega = 0$$

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} [x_0 (1 + \gamma t) + 2 v_0 t]$$

Smorzamento critico.

Nonostante l'apparenza complicata della soluzione, nel caso di oscillazioni armoniche semplici con  $\gamma = 0$ ,  $\gamma\Omega/2 = i\omega_0$ , la soluzione di sopra diventa

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

che descrive soluzione generale di un oscillatore armonico libero.

Adesso torniamo all'equazione non-omogenea. Questa ha la soluzione particolare

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{F}{m \omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega} e^{i \omega t} = \frac{F}{i Z} e^{i \omega t} = \frac{F}{|Z|} e^{i(\omega t - \varphi - \pi/2)} \\ Z &= m (\gamma \omega + i (\omega^2 - \omega_0^2)) = |Z| e^{i \varphi} \\ \tan \varphi &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\gamma \omega} \end{aligned}$$

la soluzione completa è la combinazione della soluzione omogenea, nella quale si fa sostituzione  $x_0 \rightarrow x_0 - \frac{F}{m \omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega}$  e  $v_0 \rightarrow v_0 - i \omega \frac{F}{m \omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega}$  e quella particolare. Si vede che il coefficiente  $\gamma$  smorza l'ampiezza in modo che dopo un tempo sufficiente lungo la soluzione omogenea va a zero e sistema è **costretto** di oscillare con la frequenza  $\omega$  della forza esterna.

## 1.1.5 Trasformata di Fourier

Ogni vettore  $\vec{x}$  si può sviluppare in una base ortonormale  $\vec{e}_n$  come segue

$$\vec{e}_n \cdot \vec{e}_m = \delta_{n,m} \quad (3)$$

$$\vec{x} = \sum_n x_n \cdot \vec{e}_n \quad (4)$$

$$x_n = \vec{x} \cdot \vec{e}_n \quad (5)$$

dove  $x_n$  le coordinate in quella base. Questa procedura si applica alle funzioni esponenziali che soddisfano

$$(e_n \cdot e_m) = \frac{1}{a} \int_0^a e^{i(2\pi/a)(n-m)p} dp = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{i(2\pi/a)(n-m)p} dp = \delta_{n,m}$$

$$(e(x) \cdot e(y)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)p} dp = \delta(x-y)$$

e rappresentano una base ortonormale nello spazio delle funzioni con i vettori base  $e_n = e^{in p} / \sqrt{2\pi} = e^{i(2\pi/a)np} / \sqrt{a}$ . Perciò, ogni funzione si può espandere in questa base.

Se la funzione è **periodica**  $f(x+a) = f(x)$  in un intervallo  $[0, a]$  lo sviluppo è discreto in termini di **serie di Fourier**. Le formule generali (5) diventano

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i(2\pi/a)nx}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^a f(x) e^{-i(2\pi/a)nx} dx$$

dove il numero d'onda discreto è  $k_n = 2\pi n/a$ .

Essendo intervallo  $[-a/2, a/2] = [0, a]$  arbitrario si può considerare il limite  $a \rightarrow \infty$ .

In questo caso si parla di **trasformata di Fourier integrale**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{ixp} dp$$

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

in  $n$  dimensioni si scrive

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{i\vec{x}\vec{p}} d^n p$$

$$f(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\vec{x}\vec{p}} d^n x$$

$f(p)$  si chiama la trasformata di Fourier nello **spazio dei momenti**, della funzione  $f(x)$  definita nello spazio delle coordinate. Analogamente, se la funzione è  $f(t)$  (tempo) la sua trasformata di Fourier è definita nello spazio di frequenze angolari  $f(\omega)$ .

**Esercizio** La conducibilità elettrica nello spazio  $t$  ha la forma

$$\sigma(t) = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

per  $t \geq 0$  Trovare la sua trasformata di Fourier  $\sigma(\omega)$ . Soluzione

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-(i\omega + 1/\tau)t} dt = \frac{\sigma_0}{\tau} \frac{1}{i\omega + 1/\tau}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}$$

al contrario si ha

$$\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \int_0^{\infty} ds e^{-s(1+i\omega\tau)}$$

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} ds e^{-s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(s\tau - t)} dt = \sqrt{2\pi}\sigma_0 \int_0^{\infty} ds e^{-s} \delta(s\tau - t)$$

$$\sigma(t) = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

## 2 Corrente elettrica

### 2.1 Descrizione microscopica

La corrente elettrica  $I$  si definisce come il flusso di carica, nell'unità di tempo, che attraversa una sezione  $S$  del conduttore.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

dove  $dQ$  è la frazione di carica che attraversa, nel tempo  $dt$ , l'area  $S$  del filo. Questo flusso, nel caso di metalli, è rappresentato dagli elettroni **liberi** di muoversi attraverso il conduttore. Dalla definizione si ricava l'unità di misura della corrente elettrica chiamata Amperé<sup>1</sup>

$$A = \frac{C}{\text{sec}}$$

Dunque, la corrente elettrica è una manifestazione macroscopica dei movimenti microscopici. Per trovare il legame tra le due descrizioni, definiamo  $n$  la densità volumica del numero di elettroni

$$n = \frac{dN}{dV}$$

dove  $dN$  rappresenta numero di elettroni in un volume  $dV$  di una sezione del filo conduttore. Il volume si può esprimere attraverso la velocità media degli elettroni come segue

$$\begin{aligned} dV &= v dt S \\ dQ &= dN q_e = n q_e dV \\ dQ &= n q_e v S dt \\ I &= n q_e v S \end{aligned}$$

Qui abbiamo fatto l'assunzione che tutti gli elettroni si muovono con la stessa velocità  $v$  (chiamata velocità di deriva). Questa semplificazione non cambia niente nella sostanza dell'argomento. Uno si può domandare come si riesce calcolare la densità del numero di elettroni  $n$ . La risposta è sorprendentemente semplice e passa attraverso la definizione della mole  $n_{\text{moli}} = N/N_A$  dove  $N_A = 6 \times 10^{23}$  è il numero di Avogadro.

$$\begin{aligned} n &= Z \frac{N}{V} = Z \frac{N_A}{V_A} \\ \rho &= \frac{M_A}{V_A} \\ n &= Z \rho \frac{N_A}{M_A} \end{aligned}$$

Nel caso di di rame  $\rho_{Cu} = 9 \text{ g/cm}^3$ ,  $M_{Cu} = 64 \text{ g}$ ,  $Z = 1$  si trova numero di elettroni di conduzione per unità di volume

$$\rho_{Cu} = 8,4 \times 10^{22} \text{ elettroni/cm}^3$$

---

<sup>1</sup>Più tardi vedremo un'altra definizione di Amperé attraverso forza tra due fili

Questo ragionamento classico richiede delle correzioni quantistiche, ma qualitativamente da risultati giusti. Numero  $Z$  rappresenta numero di elettroni di valenza (gli unici liberi di muoversi attraverso il metallo). Usando questo risultato si può calcolare la velocità di **deriva**

$$v_d = \frac{I}{n q_e S} = \frac{1 \text{ A}}{8,4 \times 10^{22} \text{ elettroni/cm}^3 \cdot 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ mm}^2} = 7 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$$

Questa velocità si può confrontare con la velocità **termica** degli elettroni

$$v_T = \sqrt{3kT/m} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 293 \text{ K}}{9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 1,2 \times 10^5 \text{ m/sec}$$

si vede che la velocità di deriva è molto più piccola di quella termica (prendendo in considerazione effetti quantistici  $v_T \approx 10^6$ ), ma se come agisce nella stessa direzione produce una corrente apprezzabile. Il movimento degli elettroni **non** è ordinato in una sola direzione, causa disturbi termici, ma in tutto si spostano seguendo il campo elettrico. In assenza del campo i movimenti termici in media si annullano e non producono uno spostamento (corrente). La domanda che si pone: se la velocità di deriva degli elettroni è così bassa, come è possibile che un segnale elettrico viaggi a velocità prossima a quella della luce? La risposta è semplice. L'elettrone che parte da un estremo di un filo non è lo stesso che arriva all'altro estremo, perché impiegherebbe un tempo veramente lungo. Quello che si propaga lungo la linea elettrica è il campo elettrico, che mette in moto tutti gli elettroni liberi presenti nei conduttori che la costituiscono. Tutto avviene come quando colleghiamo a un rubinetto aperto un estremo di lunga conduttura piena d'acqua, e l'acqua esce quasi istantaneamente dall'altro estremo. Come dimostrazione calcoliamo il tempo necessario per un elettrone di attraversare un filo lungo  $l = 1\text{cm}$

$$t = \frac{l}{v_d} = \frac{1 \text{ cm}}{7 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}} = 0,14 \times 10^3 \text{ sec} \approx 2,33 \text{ min}$$

## 2.2 Velocità di deriva

### 2.2.1 Campi elettrici costanti

La velocità di deriva è causata dal campo elettrico esterno  $\vec{E}$  che fa accelerare elettroni secondo la legge di Newton

$$\vec{a} = \frac{q_e \vec{E}}{m_e}$$

se il campo è **costante** il moto è uniformemente accelerato. La velocità di deriva si ricava integrando l'equazione di sopra che da

$$\vec{v}_d = \frac{q_e \vec{E}}{m_e} \tau \quad (6)$$

dove  $\tau$  significa il tempo medio tra due collisioni dell'elettrone con altri elettroni. Si vede che, causa collisioni, il moto in realtà diventa uniforme quando elettroni raggiungono la velocità terminale. Il moto si può descrivere come in presenza di una forza di attrito dinamico

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E} - \frac{\vec{v}}{\tau}$$

Adesso vale la pena soffermarsi su questa equazione differenziale, perché equazioni simili incontreremmo spesso in diverse situazioni fisiche. L'equazione in questione è

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{q}{m} E \quad (7)$$

Si può risolvere in due modi:

1. prima la scriviamo senza termine in  $E$  come equazione **omogenea**

$$0 = \dot{v} + \frac{v}{\tau}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}$$

e poi integriamo

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dt}{\tau}$$

$$\ln v = -\frac{t}{\tau} + \text{const.}$$

che da la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$v_H(t) = C e^{-t/\tau}$$

2. la stessa soluzione si può ottenere assumendo la forma  $v_H(t) = e^{\alpha t}$  e inserendo nel equazione omogenea si determina il valore del parametro  $\alpha$

$$\alpha = -\frac{1}{\tau}$$

$$v_H(t) = C e^{-t/\tau}$$

A questo punto si determina una soluzione **particolare** dell'equazione inomogenea (completa) che è

$$v_P = \frac{q}{m} E \tau$$

La soluzione completa è la somma tra soluzione dell'equazione omogenea e la soluzione particolare

$$v = C e^{-t/\tau} + \frac{q}{m} E \tau$$



Resta da determinare una costante arbitraria (costante di integrazione  $C$ ) dalle condizioni **iniziali** nel momento  $t = 0$  quando  $v(0) = 0$ . Le condizioni iniziali portano alla soluzione completa

$$v = \frac{q}{m} E \tau (1 - e^{-t/\tau}) \quad (8)$$

Per tempi sufficientemente lunghi  $t \geq \tau$  il fattore esponenziale muore (si dice: "a regime"), la velocità di deriva raggiunge valore terminale e si ha il moto uniforme

$$v_d = \frac{q}{m} E \tau$$

Inserendo questo risultato nella formula della corrente si ha

$$I = \frac{n q_e^2 \tau}{m_e} S E = \sigma S E$$

la costante  $\sigma = n q_e^2 \tau / m_e$  si chiama la **conducibilità**. Esprimiamo il campo elettrico tramite il potenziale elettrico  $V = E l$ , dove  $l$  rappresenta la lunghezza del filo, e otteniamo

$$I = \frac{\sigma S}{l} V = \frac{V}{R} \rightarrow \text{Legge di Ohm}$$

dove  $R = l / \sigma S$  si chiama la **resistenza** del filo. Abbiamo ricavato famosa legge empirica do Ohm dalle considerazione microscopiche. L'inverso della conducibilità si chiama la resistività  $\rho$  (o resistenza specifica) ed e una caratteristica del metallo di cui à fatto il filo. Adesso possiamo anche calcolare il tempo medio di collisione tra due elettroni del rame a  $T = 273 K$

$$\tau = \frac{m}{\rho n q_e^2} = \frac{9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}}{1,56 \times 10^{-8} \Omega \text{ m } 8,4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} (1,6 \times 10^{-19})^2 \text{ C}^2} = 2,7 \times 10^{-14} \text{ sec}$$

In generale, per i metalli, il tempo libero varia tra  $10^{-14}$  e  $10^{-15}$ , Il camino libero (distanza tra due collisioni) si trova

$$l_{free} = v_T \cdot \tau \approx 10^{-7} \text{ m}$$

.

### 2.2.2 Campi variabili nel tempo

Quanto descritto finora si riferisce alle correnti in regime **stazionario** (costanti nel tempo). Queste correnti sono prodotte dai campi elettrici costanti generati dai generatori a poli fissi (pile elettriche). In caso di campi elettrici variabili nel tempo avremmo correnti alternate. Prendiamo il campo di tipo cosinusoidale

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

L'equazione per la velocità di deriva diventa

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{q}{m} E_0 \cos(\omega t) \quad (9)$$

La soluzione della omogenea sarà come prima, ma cambia soluzione particolare che non è più costante. Per risolvere l'equazione diventa utile utilizzo dei numeri complessi e si scrive (9) come

$$\dot{z} + \frac{z}{\tau} = \frac{q}{m} E_0 e^{i\omega t}$$

dove  $v = \text{Re} z$ . Assumendo la forma della soluzione particolare come  $z = z_0 e^{i\omega t}$  si trova

$$z_0 = \frac{q}{m} \frac{E_0 \tau}{1 + i\omega \tau}$$

Scriviamo il numero complesso  $z_0 = |z_0| e^{i\varphi}$ . Il modulo  $|z_0|$  e la fase  $\varphi$  si calcolano come segue

$$|z_0| = \sqrt{z_0 z_0^*} = \frac{q}{m} \frac{E_0 \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

$$\tan \varphi = -\omega \tau$$

$$z = |z_0| e^{i(\omega t + \varphi)}$$

La legge di Ohm, per le correnti alternate si scrive in forma complessa in termini di **densità** della corrente  $j = I/S$  come

$$j(t) = \sigma(\omega) E(t)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{q_e^2 n \tau}{m_e} \frac{1}{1 + i\omega \tau}$$

Per le correnti alternate la conducibilità diventa complessa. La soluzione si ottiene prendendo la parte reale  $j(t) = \text{Re} j(t)$

$$j(t) = |\sigma| E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$|\sigma| = \frac{q_e^2 n}{m_e} \frac{\tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

I risultati per le correnti stazionarie si ottengono per  $\omega = 0$ .

## 2.3 Circuiti elettrici

Guardiamo prima circuiti in regime DC, cioè alimentati da una *f.e.m* (forza elettromotrice)  $\mathcal{E}$  costante.

### 2.3.1 Circuito RC

Circuito RC consiste di una resistenza ed un condensatore.

- Carica di un condensatore

Il sistema di equazioni per la carica di un condensatore di capacità  $C$  collegato ad una resistenza esterna  $R$ , un voltmetro di resistenza interna  $R_V$  per misurare il voltaggio del condensatore, e la batteria a voltaggio costante  $\mathcal{E}$  è

$$\begin{aligned} I &= I_C + I_V \\ \frac{Q}{C} &= R_V I_V \\ \mathcal{E} &= RI + R_V I_V \end{aligned}$$

che porta all'equazione differenziale

$$\mathcal{E} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \left( 1 + \frac{R}{R_V} \right)$$

con le soluzioni che descrivono la carica del condensatore

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{\mathcal{E} \tau}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \\ V_C &= \frac{\mathcal{E} R_V}{R + R_V} (1 - e^{-t/\tau}) \\ I_C(t) &= \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} \\ I_V(t) &= \frac{\mathcal{E}}{R + R_V} (1 - e^{-t/\tau}) \\ I(t) &= \frac{\mathcal{E}}{R + R_V} \left( 1 + \frac{R_V}{R} e^{-t/\tau} \right) \\ \tau &= R_{\text{tot.}} C = \frac{R R_V}{R + R_V} C \end{aligned}$$

- Scarica di un condensatore Per la scarica si ha

$\mathcal{E} = 0, I_C = -dQ/dt, V_C(t=0) = V_{C,max}$  e le soluzioni sono

$$\begin{aligned} Q(t) &= V_{C,max} C e^{-t/\tau} \\ V_C(t) &= V_{C,max} e^{-t/\tau} \\ I_C(t) &= \frac{V_{C,max}}{R_{tot}} e^{-t/\tau} \\ I_R(t) &= \frac{V_{max}}{R} e^{-t/\tau} \\ I_V(t) &= \frac{V_{max}}{R_V} e^{-t/\tau} \\ \tau &= \frac{R R_V}{R + R_V} C = R_{tot} C \end{aligned}$$

il parametro  $\tau$  ha le dimensioni di tempo e si chiama **tempo caratteristico** del condensatore. Dopo un tempo  $t_{1/2} = \tau \ln 2$  il condensatore si carica a **meta**  $V_C(t_{1/2}) = V_{C,max}/2$ .

### Esercizi

1. Calcolare il potenziale a regime sulle piastre di un condensatore di capacità  $C = 470 \mu F$ , collegato in un circuito con  $R = 10^6 \Omega$  e alimentato da una batteria di  $\mathcal{E} = 8 V$ , tenendo conto della resistenza interna  $R_V = 5 \times 10^5 \Omega$  del voltmetro.
2. Dimostrare che le curve di carica e scarica si intersecano nel punto  $(V_{max}/2, t_{1/2} = \tau \ln 2)$  e che il tempo caratteristico corrisponde a  $\tau = -V_{max} \cot \alpha$ , dove  $\alpha$  rappresenta l'angolo che la tangente nel punto  $(V_{max}, 0)$  chiude con l'asse di tempo.

### 2.3.2 Circuito RL

Circuito RL è composto da una resistenza  $R$  ed una induttanza  $L$  alimentati da una pila di *f.e.m.*  $\mathcal{E}$  costante. L'equazione del circuito segue dalla regola delle maglie

$$\mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt}$$

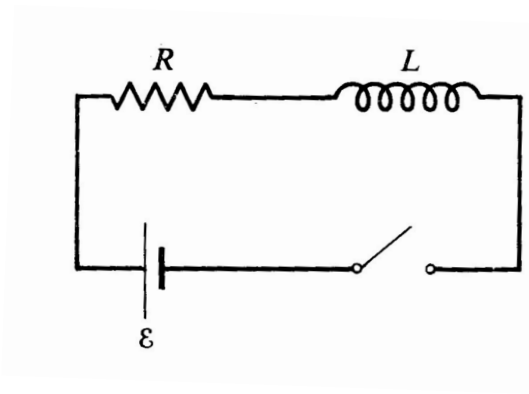
che ha la soluzione

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

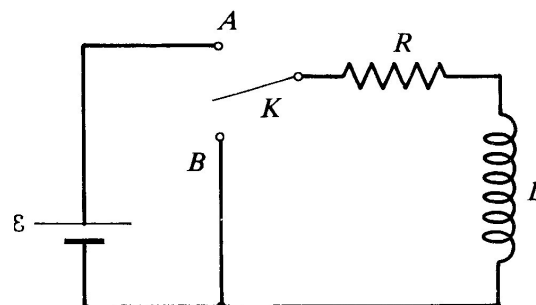
dove  $\tau = L/R$ . Si vede che l'impedenza rallenta la crescita dell'intensità della corrente causa induzione magnetica e la corrente impiega un certo tempo per raggiungere il suo valore massimo  $I = \mathcal{E}/R$ .

## Esercizi

- Un generatore a tensione costante  $\mathcal{E} = 50\text{ V}$  all'istante  $t = 0$  viene chiuso in un circuito composto da una resistenza  $R = 10\ \Omega$  e un'induttanza  $L = 0,4\text{ H}$ , poste in serie. Si calcoli:
  - la corrente in un momento  $t$  e "a regime"
  - tempo caratteristico del circuito  $\tau$
  - il tempo quando la corrente è a metà del valore massimo.

Figure 3: *La corrente a regime nel circuito RL*

- Nel circuito in figura l'interruttore è in posizione  $A$  per permettere raggiungimento di regime e poi viene posto nel punto  $B$  per escludere la batteria. Usando i dati dell'esercizio precedente, calcolare d.d.p. (differenza di potenziale) sulla resistenza dopo lo spostamento dell'interruttore. Calcolare l'energia dissipata per l'effetto Joule e la si paragoni con l'energia magnetica immagazzinata nell'induttanza.

Figure 4: *La corrente a regime nel circuito RL*

3. Dimostrare che le curve di corrente nei due esercizi precedenti si intersecano nel punto  $(I_{\max}/2, t_{1/2} = \tau \ln 2)$  e che il tempo caratteristico corrisponde a  $\tau = -I_{\max} \cot \alpha$ , dove  $\alpha$  rappresenta l'angolo che la tangente nel punto  $(I_{\max}, 0)$  chiude con l'asse di tempo. Dopo quanto tempo la corrente assume 12,5% del valore della corrente iniziale?

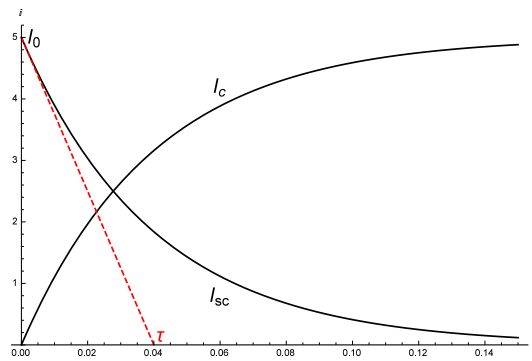


Figure 5: *Andamento temporale della corrente nel circuito RL*

4. In un circuito si hanno una resistenza  $R_1 = 10 \Omega$  in serie con un induttanza  $L = 5 H$  e tutte due in parallelo con un'altra resistenza  $R_2 = 20 \Omega$ . Il circuito è alimentato da una batteria  $\mathcal{E} = 30 V$ . Dopo quanto tempo le correnti  $I_1$  e  $I_2$  sono uguali?

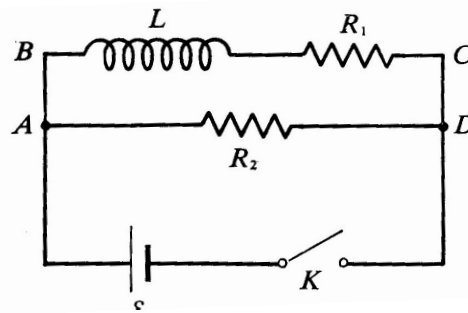


Figure 6: *Andamento temporale della corrente nel circuito RL*

5. In un circuito RLC si hanno una resistenza  $R_2 = 3 k\Omega$  in serie con un induttanza  $L = 2 H$  e tutte due in parallelo con un'altra resistenza  $R_1 = 1 k\Omega$ . Al istante  $t = 0$  viene chiuso l'interruttore e la d.d.p. del condensatore (che funge da batteria) è  $\mathcal{V} = 100 V$ . Si calcolino le correnti sulle resistenze nel generico momento  $t$ .

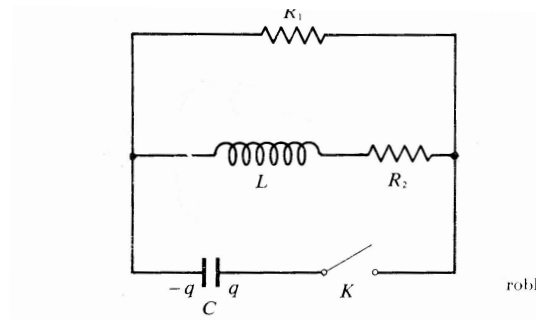


Figure 7: Fase transitoria della corrente nel circuito RLC

## Soluzioni

1. L'equazione del circuito RL è

$$\frac{\mathcal{E}}{L} = \dot{I} + \frac{R}{L}I$$

bisogna determinare la costante di integrazione  $C$ . Nell'istante iniziale  $t = 0$  abbiamo  $I_0 = 0$  e la soluzione è

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L})$$

$$\tau = L/R$$

La corrente "a regime" è

$$I(\infty) = \frac{\mathcal{E}}{R} = 5 \text{ A}$$

$$\tau_L = 4 \times 10^{-2} \text{ sec}$$

$$t_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = 2,8 \times 10^{-2} \text{ sec}$$

2. In questo caso, simile alla scarica di un condensatore, si impone  $\mathcal{E} = 0$  dopo la chiusura dell'interruttore e si ha

$$0 = \dot{I} + \frac{R}{L}I$$

e la soluzione è

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_L}$$

$$V_R = \mathcal{E} e^{-t/\tau_L}$$

Energia dissipata per effetto Joule è

$$U = \int_0^{\infty} R I^2(t) dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau_L} dt = \frac{1}{2} L I^2(0)$$

mentre l'energia magnetica è  $U_M = \frac{1}{2} L I^2$  che dimostra la conservazione di energia. La dissipazione avviene a "spese" di energia magnetica.

3. La tangente di una funzione  $f(x)$  ha l'equazione in un punto  $x_0$

$$y_t = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Le due correnti di "carica" e "scarica" sono uguali dopo il tempo  $\hat{t}$

$$\begin{aligned} I_c &= I_{sc} \\ e^{-\hat{t}/\tau_L} &= 1 - e^{-\hat{t}/\tau_L} \\ \hat{t} &= \tau \ln 2 \end{aligned}$$

questo tempo si chiama "tempo di dimezzamento"  $\hat{t} = t_{1/2}$ . Nel caso in questione si ha

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_L} = I(0) e^{-t/\tau_L}$$

$$\begin{aligned} y_t &= I(0) (1 - t/\tau_L) \\ y_t(0) &\equiv 0 \rightarrow t = \tau \\ t_{1/2} &= \tau \ln 2 = \tau \cdot 0,693 \end{aligned}$$

il tempo dopo il quale la corrente scende al 12,5% del valore iniziale si trova imponendo  $I/I(0) = 0,125 = 1/8$  e si ha

$$\begin{aligned} 1/8 &= e^{-t/\tau} \\ \ln 1/8 &= -t/\tau \\ t_{12,5\%} &= \tau \cdot \ln 2^3 = 3\tau \ln 2 = 3t_{1/2} = 3\tau \cdot 0,693 \end{aligned}$$

4. Le equazioni del circuito sono

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= L \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 \\ \mathcal{E} &= R_2 I_2 \\ I &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$



che portano all'equazione differenziale

$$\mathcal{E} = L \dot{I}_1 + R_1 I_1$$

che ha la soluzione

$$I_1(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} (1 - e^{-R_1 t/L})$$

$$I_2(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_2}$$

La condizione della uguaglianza da

$$I_1(t) = I_2$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R_1} (1 - e^{-R_1 t/L}) = \frac{\mathcal{E}}{R_2}$$

$$t = -\frac{L}{R_1} \ln \left( 1 - \frac{R_1}{R_2} \right) = 0,35 \text{ sec}$$

5. Le equazioni del circuito sono

$$\frac{Q}{C} = L \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2$$

$$\frac{Q}{C} = R_1 I_1$$

$$I = I_1 + I_2$$

Si noti che la corrente  $I = -dQ/dt$  perché il condensatore si scarica. Combinando le equazioni di sopra si ottiene un'equazione differenziale

$$L \ddot{Q} + \left( R_2 + \frac{L}{C R_1} \right) \dot{Q} + \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{Q}{C} = 0$$

Le condizioni iniziali sono  $I(0) = I_2(0) = 0$ ,  $Q(0) = C V_0$ ,  $I_1 = V_0/R_1$ . Assumendo  $Q = e^{\alpha t}$  si ottiene l'equazione caratteristica

$$L \alpha^2 + \alpha \left( R_2 + \frac{L}{C R_1} \right) + \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{1}{C} = 0$$

Si verifica numericamente che  $R_2 + \frac{L}{C R_1} = 4 k\Omega$  e anche  $\left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{1}{C} = 4 k\Omega$  così che  $\Delta = 0$  e le due soluzioni coincidono  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Dalla introduzione matematica si ha la soluzione per smorzamento critico

$$Q(t) = e^{-\gamma t/2} [Q_0 (1 + \gamma t) + 2 I(0) t]$$

dove  $\gamma = \left(R_2 + \frac{L}{CR_1}\right)/L = 2 \times 10^3 \Omega/H$ . Finalmente le correnti sono

$$\begin{aligned} I(t) &\equiv -dQ/dt = \frac{Q_0\gamma}{2} e^{-\gamma t/2} (1 - \gamma t) \\ I_1(t) &= \frac{Q_0}{CR_1} e^{-\gamma t/2} (1 + \gamma t) \\ I_2 &= I - I_1 \end{aligned}$$

## 2.4 Circuito RLC in regime AC

Adesso passiamo al circuito alimentato dalla *f.e.m.* di tipo armonico  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$  (corrente alternata). L'equazione del circuito RLC è

$$\mathcal{E}(t) = L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

scrivendola in termini della carica elettrica, usando  $I = dQ/dt$ , si ottiene

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q(t)}{C} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$$

Confrontiamo questa equazione con quella di un oscillatore smorzato soggetto alla forza esterna.

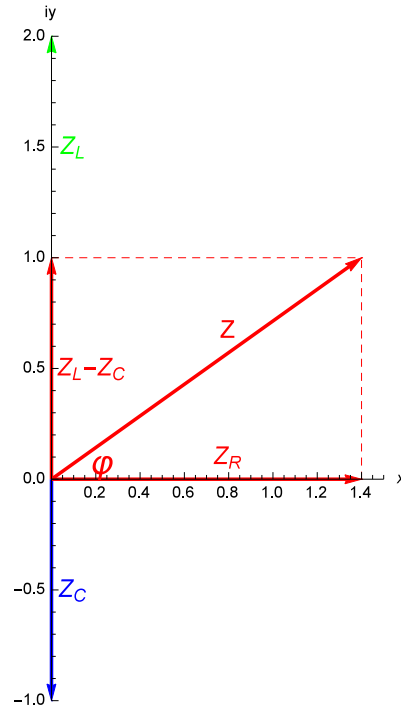
$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + kx = F e^{i\omega t}$$

che è stata risolta nell'introduzione matematica. Per utilizzare queste soluzioni bisogna fare le seguenti identificazioni

- $x = Q$
- $m = L$
- $F = \mathcal{E}$
- $k = 1/C$
- $\gamma = R/L$
- $\omega_0^2 = k/m = 1/LC$
- $\Omega = \sqrt{1 - 4\omega_0^2\tau_L^2}$

la frequenza naturale del circuito  $\omega_0 = k/m$  è dovuta alla forza di richiamo  $-kx$ . Si definiscono anche tempi caratteristici

- $\tau_C = RC$

Figure 8: *Rappresentazione vettoriale delle impedenze del circuito RLC*

- $\tau_L = L/R$
- $\tau_0 = \sqrt{\tau_L \tau_C} = 1/\omega_0$ .

Le soluzioni omogenee sono date nell'introduzione matematica, ma queste vanno a zero per tempi sufficientemente lunghi e ci interessa la soluzione particolare.

La carica e la corrente **a regime**  $t \geq \tau$  sono dati dal

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= Z I \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \\ Z &= |Z| e^{i\varphi} \\ |Z| &= \sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2} \\ \tan \varphi &= \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \\ \mathcal{E}(t) &= \text{Re } \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \\ I(t) &= \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \text{Re } e^{i(\omega t - \varphi)} = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi) \\ Q(t) &\equiv \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega |Z|} \text{Re } e^{i(\omega t - \varphi - \pi/2)} = \frac{\mathcal{E}}{\omega |Z|} \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

dove  $Z$  è l'impedenza del circuito (vedere figura 8). Angolo  $\varphi$  rappresenta il **ritardo** della corrente sulla f.e.m. Per  $\varphi \geq 0$  la f.e.m. è massima a  $t = 0$ , mentre la corrente ritarda e diventa massima dopo  $t = \varphi/\omega$ . Per  $\varphi \leq 0$  abbiamo la situazione contraria, la corrente è in anticipo sulla tensione.

Consideriamo tre situazioni particolari

- Circuito puramente resistivo  $R \neq 0$  con ( $L = 0, C = \infty$ ) implica  $\mathcal{E} = Z_R I = R I$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t)$$

$$V_R(t) \equiv \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$\varphi = 0$  la corrente in **fase** con f.e.m. La corrente è massima quando è massima la diff. potenziale sulla resistenza.

- Circuito puramente induttivo  $L \neq 0$  con ( $R = 0, C = \infty$ ) vale  $\mathcal{E} = Z_L I = I \omega L e^{i\pi/2}$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \sin(\omega t)$$

$$V_L(t) \equiv \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$\varphi = \pi/2$  la corrente è in **ritardo** su f.e.m. La corrente è massima quando è zero la diff. potenziale sull'induttanza  $\mathcal{E} = L dI/dt = 0 \rightarrow I_{max}$ .

- Circuito puramente capacitivo  $C \neq 0$  con ( $R = 0, L = 0$ )  $\mathcal{E} = Z_C I = I e^{-i\pi/2}/\omega C$

$$I(t) = \omega C \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \pi/2) = -\omega C \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$$

$$V_C(t) \equiv \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$\varphi = -\pi/2$  la corrente è in **anticipo** su f.e.m. La corrente è zero quando la diff. potenziale è massima sulle piastre del condensatore.

Consideriamo la massima corrente che si può avere. La relazione

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|}$$

è massima quando  $|Z|$  ha il valore minimo

$$|Z|_{min} = \sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2} = R \rightarrow 1/\omega C = \omega L$$

che si ottiene quando  $\omega = \omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$ . Questo è il caso della **risonanza** quando un oscillatore armonico, soggetto ad una forza esterna, la cui frequenza è **uguale** alla frequenza propria  $\omega_0$  dell'oscillatore raggiunge ampiezze molto grandi fino a spezzarsi. Un altro caso interessante è quando

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2} = 0 \\ \mathcal{E} &= 0 \\ I &= \frac{0}{0} = \text{const.} \end{aligned}$$

Questo rappresenta un circuito  $LC$  senza resistenza e generatore che si scambia l'energia tra induttanza e la capacità con la frequenza angolare  $\omega_0$ .

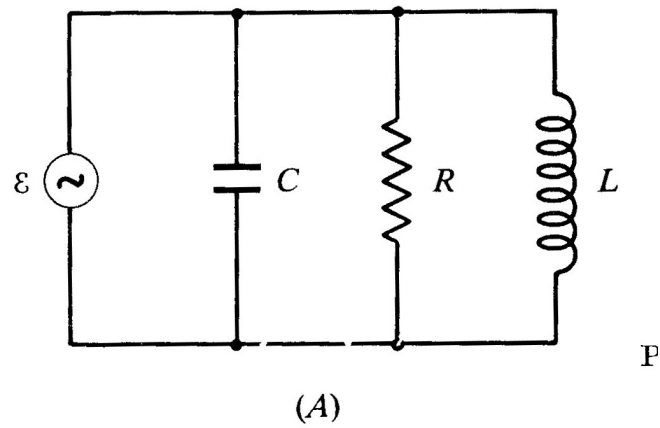
In caso di una f.e.m. rappresentata da più armoniche  $\mathcal{E}(t) = \sum_n \mathcal{E}_n e^{i(\omega_n t + \delta_n)}$  il risultato di sopra si generalizza così

$$I(t) = \sum_n \frac{\mathcal{E}_n}{Z_n} \cos(\omega_n t + \delta_n - \varphi_n)$$

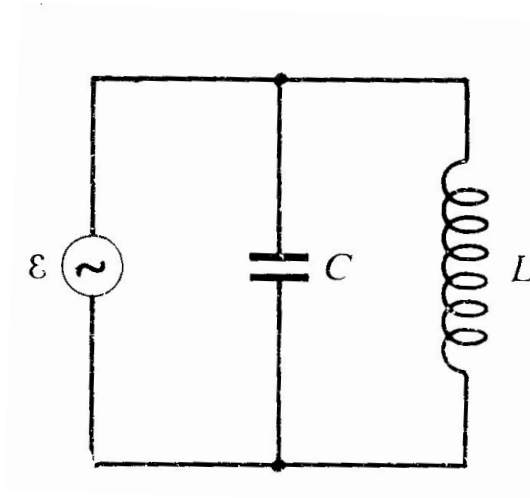
dove  $\delta_n$  rappresenta la fase delle singole armoniche. Questo tipo di f.e.m. viene prodotta quando il campo magnetico del rotore di un alternatore non è costante e la f.e.m. non ha semplice forma sinusoidale.

#### Esercizi

1. Nel circuito in figura abbiamo  $I_{C,eff} = 1 \text{ A}$ ,  $I_{R,eff} = 0,8 \text{ A}$ ,  $I_{L,eff} = 2 \text{ A}$ . Si calcoli
  - $I_{eff}$  erogata dal generatore
  - la fase  $\varphi$  tra  $I$  e  $\mathcal{E}$

Figure 9: *circuito RLC in parallelo*

2. Nel circuito, con un condensatore  $C = 2 \mu F$  ed un induttanza  $L = 1 H$  in parallelo, la frequenza è  $\nu = 50 Hz$  e  $\mathcal{E}_{eff} = 200 V$ . Si calcolino valori efficaci delle correnti nei rami del circuito.

Figure 10: *Circuito LC in regime AC*

3. Nel circuito in figura la f.e.m varia con la legge  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ . Si calcoli il rapporto tra la componente alternata e quella costante della d.d.p. ai capi della resistenza a regime.

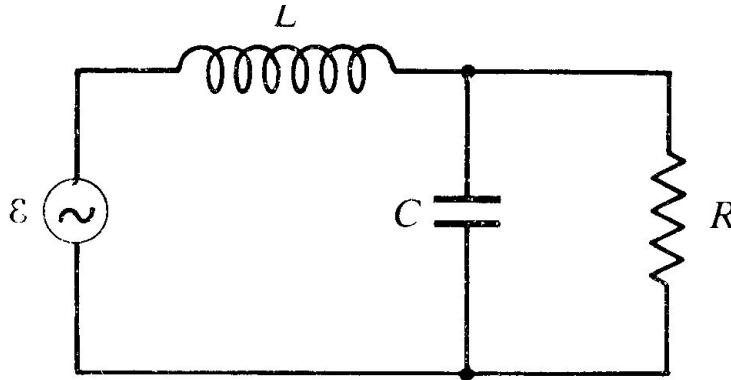


Figure 11: *circuito RLC con due armoniche*

### Soluzioni

1. essendo tutti gli elementi in parallelo hanno la d.d.p. uguale, mentre le correnti sono

- sulla resistenza la corrente è **in fase**  $\varphi = 0$  con il voltaggio.

$$I_{R,eff} = \frac{V_{eff}}{R}$$

- sulla induttanza la corrente è **in ritardo**  $\varphi = \pi/2$  con il voltaggio.

$$I_{L,eff} = \frac{V_{eff}}{\omega L}$$

•

- sul condensatore la corrente è **in anticipo**  $\varphi = -\pi/2$  con il voltaggio.

$$I_{C,eff} = \omega C V_{eff}$$

- la corrente totale si trova dalla regola dei vettori come

$$I_{tot} = \sqrt{I_{R,eff}^2 + (I_{C,eff} - I_{L,eff})^2} = 1,28 \text{ A}$$

lo sfasamento è

$$\tan \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = 1,25 \rightarrow \varphi = 0,896 \times = 51,36^\circ$$

Altro modo di calcolare è utilizzare l'impedenza equivalente del parallelo

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{tot}} &= \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} \\ Z_R &= R \\ Z_C &= \frac{1}{i\omega C} \\ Z_L &= i\omega L \\ \frac{1}{Z_{tot}} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C \\ Z_{tot} &= \frac{\frac{1}{R} - i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = |Z_{tot}| e^{i\varphi} \\ |Z_{tot}| &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}} \\ I_{tot} &= \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \\ \tan \varphi &= R \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = \frac{(I_L - I_C)}{I_R} \end{aligned}$$

2. Si calcola per prima l'impedenza del parallelo

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{LC}} &= \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = i\omega C + \frac{1}{i\omega L} \\ Z_{LC} &= \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 CL} \end{aligned}$$

e poi si ha la corrente sul condensatore

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= Z_C I_C \\ I_C &= i\omega C \mathcal{E} = \omega C \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} \end{aligned}$$

e sull'induttanza

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= Z_L I_L \\ I_L &= \frac{\mathcal{E}}{i\omega L} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} e^{i(\omega t - \pi/2)} \end{aligned}$$

e la corrente totale

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{Z_{tot}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} (1 - \omega^2 CL) e^{i(\omega t - \pi/2)}$$



3. Si calcoli la parte in regime AC

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_{RC}} &= \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} = i\omega C + \frac{1}{R} \\ Z_{RC} &= \frac{R}{1 + i\omega^2 C R} \\ Z_{tot} \equiv Z_L + Z_{RC} &= i\omega L + \frac{R}{1 + i\omega^2 C R} = \frac{R + i\omega L - \omega^2 C R L}{1 + i\omega^2 C R} \\ V_R &= Z_{RC} I = \frac{Z_{RC}}{Z_{tot}} \mathcal{E}\end{aligned}$$

in regime DC si ha

$$V_{R,1} = \mathcal{E}_1$$

il rapporto

$$\frac{V_R}{V_{R,1}} = \frac{\mathcal{E} Z_{RC}}{\mathcal{E}_1 Z_{tot}} = \frac{R^2 (1 - \omega^2 L C) - i\omega L R \mathcal{E}}{R^2 (1 - \omega^2 L C)^2 + \omega^2 L^2 \mathcal{E}_1} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_1} \frac{R}{\sqrt{R^2 (1 - \omega^2 L C)^2 + \omega^2 L^2}} e^{i(\omega t + \varphi)}$$

dove la fase è data da

$$\tan \varphi = -\frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 L C)}$$

### 3 Il campo magnetico

Abbiamo visto che le cariche stazionarie producono campi elettrici  $\vec{E}$  mentre campi magnetici  $\vec{B}$  sono prodotti dalle cariche **in movimento** (correnti elettriche). La legge fondamentale del magnetismo e la legge di Biot-Savart

$$d\vec{B} = k' I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (10)$$

che da il campo magnetico  $\vec{B}$  nel punto a distanza  $\vec{r}$ , mentre  $dl$  rappresenta un elemento di linea di un conduttore attraversato dalla corrente  $I$ . Come esempio di applicazione calcoliamo il campo magnetico prodotto da:

1. Un conduttore di lunghezza infinita posto sull'asse  $z$ , nel punto distante  $a$  da essa. Elemento di linea dell'asse  $z$  è  $d\vec{l} = dz \vec{k}$ .

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{a} + \vec{z} \\ d\vec{l} \times \vec{r} &= dz \vec{k} \times (a \vec{r}_0 + z \vec{k}) = a dz \vec{\varphi}_0 \\ \vec{B} &= k' I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{[a^2 + z^2]^{3/2}} = 2 k' I \vec{\varphi}_0 \int_0^{\infty} \frac{a dz}{[a^2 + z^2]^{3/2}} \\ \vec{B} &= \frac{2 k' I}{a} \vec{\varphi}_0\end{aligned}$$

Si vede che il campo magnetico avvolge il filo con le linee circolari chiuse su se stesse. Il verso è **anti-orario** per la corrente che segue l'asse  $z$  in su e orario quando la corrente va in giù.

2. Una spira circolare, di raggio  $R$ , nel piano  $x, y$  in un punto  $P(0, 0, a)$ .

$$d\vec{l} = R d\varphi \vec{\varphi}_0$$

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{a}$$

$$r = \sqrt{R^2 + a^2}$$

$$\vec{a} = a \vec{k}$$

$$\vec{R} = R \vec{r}_0$$

$$\vec{B} = k' I \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{a} - \vec{R})}{[a^2 + R^2]^{3/2}} = k' I \int_0^{2\pi} R d\varphi \frac{a \vec{r}_0 + R \vec{k}}{[a^2 + R^2]^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{2\pi k' I R^2}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \vec{k}$$

quando  $a \geq R$ ,  $r \approx a$  la formula si semplifica dando

$$\vec{B} = 2\pi \frac{k' I R^2}{a^3} \vec{k} = 2 \frac{k' I S}{a^3} \vec{k}$$

dove  $S = \pi R^2$  è l'area della spira circolare. Si definisce il vettore  $\vec{m} = I S \vec{k}$  che si chiama momento del dipolo magnetico e la spira rappresenta effettivamente un dipolo magnetico, il cui campo è dato dalla formula

$$\vec{B} = \frac{2 k' \vec{m}}{a^3}$$

L'ultimo esempio, oltre a servire come esercizio della legge di Biot-Savart, ci fa capire l'origine del magnetismo nella materia. Le spire circolari elementari sono le orbite elettroniche negli atomi che generano campi magnetici dipolari. Il solenoide è una struttura di tante spire circolari messe insieme che formano un cilindro. Il campo magnetico sull'asse del solenoide si può trovare quadrando il contributo di

spire nell'arco di angolo  $d\theta$  misurato dall'asse. Si ha

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{r d\theta}{dl} \\ I_{dl} &= I n dl = \frac{n I r d\theta}{\sin \theta} \\ B_z &= 2\pi k' I \frac{R^2}{r^3} = 2\pi k' I \frac{\sin^2 \theta}{r} \\ R &= r \sin \theta \\ dB_z &= 2\pi k' I_{dl} \frac{\sin^2 \theta}{r} = 2\pi k' I n \sin \theta d\theta \\ B_z &= 2\pi k' I n (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)\end{aligned}$$

Per un solenoide di lunghezza infinita  $\theta_1 = 0$   $\theta_2 = \pi$  e la formula si semplifica dando

$$B_z = 4\pi k' I n$$

Calcoliamo adesso il **flusso magnetico** attraverso una superficie **chiusa** che avvolge il filo del primo esercizio

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{2k' I}{a} \oint dS \vec{\varphi}_0 \cdot \vec{k} = 0$$

Si può dimostrare che questa è una proprietà generale del campo magnetico. Inoltre, calcoliamo il **lavoro** compiuto dal campo quando fa un giro attorno al filo

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{2k' I}{a} \int_0^{2\pi} a d\varphi = 4\pi k' I$$

anche questo è un risultato di validità generale. Possiamo scrivere insieme le formule di base per campi elettrici e magnetici statici

1.  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi k Q$  Legge di Gauss
2.  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  assenza di monopoli magnetici
3.  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  conservatività della forza elettrica
4.  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi k' I$  legge di Ampère

### 3.1 Forza di Lorentz

Quando una carica puntiforme si trova nel campo elettrico è soggetta alla forza elettrica

$$\vec{F} = q_p \cdot \vec{E}$$

In analogia è da aspettarsi che anche il campo magnetico agisca con una forza simile sulle cariche. La differenza tra due campi sta nel fatto che il campo magnetico agisce solo su le cariche puntiformi **in movimento** con la forza chiamata forza di Lorentz

$$\vec{F}_L = q_p \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Questa formula permette di trovare l'unità di misura del campo magnetico nel sistema internazionale (SI).

$$[B] = \left[ \frac{F}{q_p v} \right] = \frac{N}{Cm/sec} = \frac{N}{Am}$$

$$T(\text{Tesla}) = \frac{N}{Am}$$

$$1 T = 10^5 G(\text{Gauss})$$

Confrontano la forza elettrica e forza di Lorentz possiamo trovare il legame tra le unità di due campi

$$\left[ \frac{F}{F_L} \right] = \left[ \frac{q_p E}{q_p v B} \right]$$

$$\left[ \frac{E}{B} \right] = [v]$$

si vede che nel sistema di unità SI, il rapporto di  $E$  e  $B$  ha le dimensioni di una velocità. Usando le espressioni per il campo elettrico di Coulomb e quello magnetico di un filo lungo si ottiene

$$\left[ \frac{E}{B} \right] = [v] = \left[ \frac{k q / r^2}{k' I / r} \right] = \left[ \frac{k}{k' v} \right]$$

$$\frac{k}{k'} = c^2$$

La conclusione è che le costanti **non** sono indipendenti, ma proporzionali ad un'altra costante fondamentale che è la velocità della luce. Questo è un modo semplice di vedere una relazione intrinseca tra campi elettrici e magnetici dinamici. Quando abbiamo un conduttore che porta la corrente elettrica è più conveniente scrivere la forza di Lorentz attraverso la corrente stessa. Si noti che la corrente non è altro che un insieme di elettroni e si può scrivere

$$d\vec{F}_L = dN q_p \cdot \vec{v} \times \vec{B} = n dV q_p \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_L = \int \vec{j} \times \vec{B} dV = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$$

### 3.1.1 Forza tra due correnti

Se ci sono due conduttori che portano le correnti  $I_1, I_2$  si può scrivere la forza tra due correnti

$$\vec{F}_{12} = I_1 \int d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2$$

$$\vec{F}_{12} = k' I_1 I_2 \int_{C_1} \int_{C_2} d\vec{l}_1 \times \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^3}$$

Nel caso di due conduttori lunghi e paralleli la formula da

$$F_{12} = 2k' \frac{I_1 I_2}{d} l$$

dove  $d$  rappresenta la distanza ortogonale tra due fili ed  $l$  la loro lunghezza. La forza è **attrattiva** quando le correnti hanno lo stesso verso e **repulsiva** quando i versi sono opposti.

### 3.1.2 Movimento di una carica nel campo magnetico

Consideriamo la situazione di una carica, in assenza di campo elettrico  $\vec{E} = 0$ , che entra in un campo magnetico  $\vec{B} = B_y \vec{j}$  con la velocità  $v_0$ . La velocità è data da  $\vec{v}_0 = v_x \vec{i} + v_z \vec{k}$ . Le componenti della forza di Lorentz sono

$$F_y = q(v_z B_x - v_x B_z) = 0$$

$$F_x = q(v_y B_z - v_z B_y) = -q v_z B_y$$

$$F_z = q(v_x B_y - v_y B_x) = q v_x B_y$$

Equazioni di moto sono

$$a_y \equiv \ddot{y} = 0$$

$$a_x \equiv \ddot{x} = -\frac{q}{m} v_z B_y$$

$$a_z \equiv \ddot{z} = \frac{q}{m} v_x B_y$$

Introduciamo una variabile **complessa**  $u = x + iz$  e  $\omega = qB/m$  che permette di scrivere le ultime due equazioni

$$0 = \ddot{u} - i\omega \dot{u}$$

che da le soluzioni

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= \dot{u}(0)e^{i\omega t} \\ u(t) &= u(0) + \frac{\dot{u}(0)}{i\omega} (e^{i\omega t} - 1)\end{aligned}$$

separando la parte reale ed immaginaria si trova

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 - \frac{v_{z,0}}{\omega} + \frac{1}{\omega} (v_{z,0} \cos \omega t + v_{x,0} \sin \omega t) \\ z(t) &= z_0 + \frac{v_{x,0}}{\omega} + \frac{1}{\omega} (-v_{x,0} \cos \omega t + v_{z,0} \sin \omega t)\end{aligned}$$

combinando le due soluzioni si dimostra che la traiettoria è un **cerchio**

$$\left[ x(t) - \left( x_0 - \frac{v_{z,0}}{\omega} \right) \right]^2 + \left[ z(t) - \left( z_0 + \frac{v_{x,0}}{\omega} \right) \right]^2 = \frac{1}{\omega^2} (v_{x,0}^2 + v_{z,0}^2)$$

di raggio

$$R = \frac{\sqrt{v_{x,0}^2 + v_{z,0}^2}}{\omega} = \frac{v}{\omega} = \frac{m v}{q B}$$

e con il centro nel punto  $x_0 - \frac{v_{z,0}}{\omega}, z_0 + \frac{v_{x,0}}{\omega}$ . Il periodo di rotazione  $T = 2\pi m/qB$ . Combinando l'effetto del campo elettrico e magnetico si accelerano particelle negli acceleratori. Il ciclotrone consiste di due semi-cerchi separati da uno spazio dove è applicato campo elettrico. Il campo elettrico **accelera** le particelle cariche, mentre il campo magnetico gli fa girare sulle orbite circolari. Come si vede dalle formule di sopra il raggio dell'orbita dipende dalla velocità, mentre il periodo no.

#### Esercizi

- Un protone di massa  $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$  kg e carica  $q_p = 1,6 \times 10^{-19}$  C, inizialmente fermo, viene accelerato tra due piastre parallele tra le quali c'è il potenziale elettrico  $V = 5 \times 10^3$  V. Successivamente il protone entra in un campo magnetico  $B = 1,2$  T perpendicolare alla sua velocità. Calcolare
  - la velocità quando entra nel campo magnetico
  - il raggio della traiettoria nel campo magnetico e la frequenza di rotazione

#### Soluzioni

- Prima si calcola la velocità del protone quando si accelera tra le piastre parallele (un condensatore piano)

- velocità del protone

$$\begin{aligned}
 E_k &\equiv \frac{1}{2} m v^2 = q_p \cdot V \\
 v &= \sqrt{2 q_p V / m} = \sqrt{2 \cdot 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 5 \times 10^3 \text{ V} / 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}} \\
 &= \sqrt{1,6 \times 10^{-15} \text{ J} / 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}} = \sqrt{0,958 \times 10^{12} \text{ m}^2 / \text{sec}^2} \\
 &\approx 0,98 \times 10^6 \text{ m/sec} \approx 10^6 \text{ m/sec}
 \end{aligned}$$

- Raggio della traiettoria

$$\begin{aligned}
 R &\equiv \frac{m v}{q_p B} = \frac{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot 0,98 \times 10^6 \text{ m/sec}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,2 \text{ T}} \\
 &= 0,85 \times 10^{-2} \frac{\text{N sec}}{\text{C N/Am}} = 0,85 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

### 3.2 Induzione magnetica

Si è visto che la corrente elettrica (cariche in movimento) genera campi magnetici.

Si pone la domanda se il campo può, in qualche modo, mettere in movimento le cariche e generare la corrente chiamata **corrente indotta**. Prendiamo una spira rettangolare con il lato  $AB$  che può scivolare su altri lati con la velocità  $v$ . Nel tempo  $dt$  esiste la variazione dell'area della spira

$$\begin{aligned}
 dS &= v l_0 dt \\
 \frac{dS}{dt} B &= l_0 v B
 \end{aligned}$$

dall'altro canto calcoliamo il lavoro della forza di Lorentz

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{q} \int F_l dl &= v B l_0 = \frac{dS}{dt} B \\
 \oint \vec{E} d\vec{l} &= \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{S})
 \end{aligned}$$

Prendiamo adesso una spira fissa che si muove in un campo magnetico variabile e calcoliamo il lavoro della forza di Lorentz lungo la spira

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= v \vec{j} \\
\vec{b} &= B \vec{k} \\
\vec{F}_L &= q v B \vec{i} \\
\oint_C \vec{F}_l d\vec{l} &= (F_2 - F_4) l = q v (B_2 - B_4) l \\
\frac{1}{q} \oint_C F_l dl &= \frac{d(B v l dt)}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{S}) \\
\oint \vec{E} d\vec{l} &= \frac{d\Phi}{dt}
\end{aligned}$$

il prodotto scalare  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$  si chiama il **flusso** del campo magnetico e la formula trovata si chiama la legge di induzione di Faraday.

$$\boxed{\mathcal{E}_{ind} = \oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{S}} \quad (11)$$

Dove  $\mathcal{E}_{ind}$  rappresenta il potenziale indotto. Il segno proviene dalla regola di Lenz che determina la direzione della corrente indotta.

La regola di Lenz: **La corrente indotta avrà la direzione tale di annullare il cambiamento di flusso magnetico che genera la corrente stessa**

In altre parole se il flusso **diminuisce** la corrente indotta genera un campo aggiuntivo (nel verso del campo esistente) tale di ripristinare il flusso originale e vice versa. Noi abbiamo ricavato la legge di Faraday usando campi statici, ma si può dimostrare che vale anche per i campi dinamici. In altre parole, se abbiamo una spira immersa in un campo magnetico variabile nel tempo si genera la corrente indotta senza bisogno di muovere la spira.

Come un esempio di un campo dinamico prendiamo un circuito  $C$  con un condensatore che si scarica generando la corrente nel circuito. Il filo conduttore è avvolto da un campo magnetico generato dalla corrente e vale la relazione

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi k' I$$

ma tra le piastre del condensatore **non** c'è un filo fisico! Questo significa che la formula non va bene? Per poter rispondere guardiamo il campo elettrico del condensatore, che dipende dal tempo

$$E(t) = 4\pi k \frac{Q(t)}{S}$$



e facendo la derivata sul tempo si trova

$$\dot{E}(t) = 4\pi k \frac{\dot{Q}(t)}{S} = 4\pi k j$$

Dunque, un campo elettrico variabile nel tempo a tutti gli effetti funge da una corrente elettrica, chiamata corrente di **spostamento**  $cI'$ . Per aver la validità della legge bisogna modificarla per includere tutte le correnti presenti

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi k' I + \frac{S}{4\pi k} I'$$

questa relazione si chiama la legge di Ampère generalizzata.

### 3.2.1 Coefficienti di induzione magnetica

Se in un circuito elettrico gira la corrente **variabile** nel tempo essa, per la legge di Biot-Savart, genera un campo magnetico proporzionale alla corrente. Il campo magnetico, a sua volta, genera un'altra corrente **indotta**. In questi casi la legge di Ampère si scrive

$$I_{ind} \equiv \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{C}{R} \frac{dI}{dt}$$

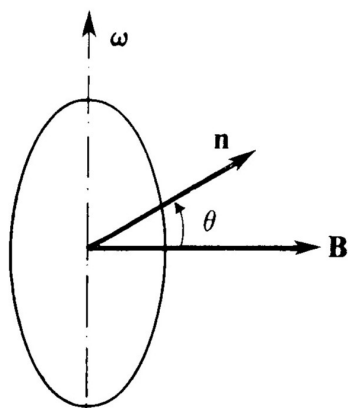
La costante di proporzionalità ( $C$ ) si chiama il coefficiente di induzione. Questo effetto si chiama **auto-induzione** ( $C = L$ ) se la corrente viene indotta nello stesso circuito che genera il campo, o **mutua-induzione** ( $C = M$ ) se si genera in un circuito diverso. Prendiamo il caso di un solenoide che auto-induce la corrente. Il coefficiente di auto-induzione si calcola come segue

$$\begin{aligned} B &= 4\pi k' n I \\ \mathcal{E}_{ind} &= 4\pi k' n N S \frac{dI}{dt} \\ L &= 4\pi k' \frac{N^2}{L} S \end{aligned}$$

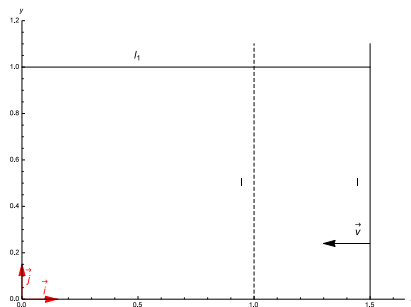
e si vede che il coefficiente dipende solamente dalla geometria del circuito.

#### Esercizi

1. Una spira circolare, di diametro  $d = 10$  cm e resistenza  $R = 0,5 \Omega$ , ruota attorno al suo diametro con la velocità angolare  $\omega = 300 \text{ sec}^{-1}$ . Il campo magnetico  $B = 0,9$  T è perpendicolare all'asse di rotazione e nel  $t = 0$  il flusso è massimo. Calcolare la corrente indotta e la potenza media delle forze esterne che mantengono la spira in rotazione.

Figure 12: *Induzione magnetica in una spira in rotazione*

2. Un solenoide di lunghezza  $l = 80$  cm è costituito di  $N_1 = 500$  spire. All'interno del solenoide e ad esso coassiale è posta una bobina di  $N_2 = 10$  spire. Nella bobina viene indotta una f.e.m.  $\mathcal{E} = 0,2$  V quando nell'interno del solenoide la corrente passa da  $I_1 = 20$  A a  $I_2 = 5$  A in un tempo  $t = 0,02$  sec. Determina l'area della bobina?
3. L'ago magnetico (la bussola) si orienta sempre nella direzione Nord-Sud lungo il meridiano magnetico terrestre. Se vicino alla bussola mettiamo un solenoide collegato alla batteria di  $\mathcal{E} = 10$  V, notiamo che la bussola si sposta così di formare l'angolo di  $45^\circ$  con la posizione originale. Il solenoide è fatto di  $N = 20$  spire ed è lungo  $l = 10$  cm. La resistenza del solenoide è  $R = 100 \Omega$ . Calcolare il valore del campo magnetico terrestre  $B_T$ .
4. Una sbarra di lunghezza  $l = 1$  m scorre verso sinistra, senza attrito, sulle due guide metalliche parallele con la velocità costante  $v = 5$  m/sec. Il sistema è immerso in un campo magnetico  $B$  ortogonale al piano delle guide e diretto verso l'alto.

Figure 13: *Induzione magnetica in una sbarra in movimento*

Calcolare la f.e.m. indotta in due situazioni

- quando il campo magnetico è costante  $B = 0,2 G$
  - quando il campo magnetico varia secondo la legge  $B = 0,2 G \cos(0,2t/\text{sec})$
5. Una spira di raggio  $r_1$  è percorsa da una corrente  $I_1$  e si trova nel piano  $x, y$ . Una seconda spira di raggio  $r_2$  e resistenza  $R$  gli si avvicina, parallela ad essa, con la velocità  $v$  lungo asse  $z$ . Il raggio  $r_2 \leq r_1$  così che il campo magnetico è praticamente costante attraverso la seconda spira. Determinare
- la corrente indotta nella seconda spira come funzione di  $z$
  - la forza di Lorentz che agisce sulla spira

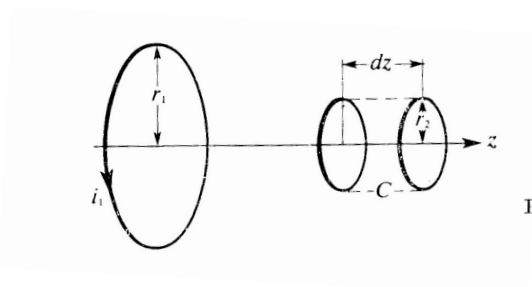


Figure 14: Induzione magnetica tra due spire

6. Calcolare la forza con la quale un conduttore lungo che porta la corrente  $I_1$  agisce sulla spira rettangolare di lato  $l$ , che porta la corrente  $I_2$ . Inoltre, calcolare il flusso attraverso la spira ed il coefficiente di mutua induzione tra la spira ed il filo lungo.

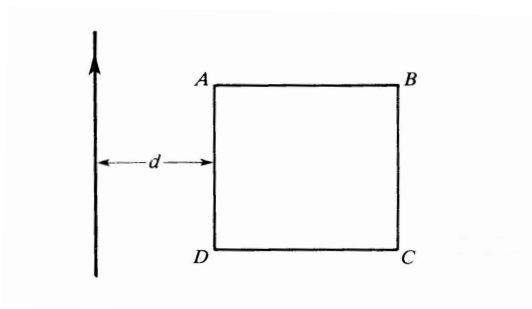


Figure 15: Induzione magnetica tra una spira ed un filo

7. Un filo rettilineo porta la corrente  $I_1 = 100 A$ , mentre una spira quadrata di lato  $l = 25 \text{ cm}$  e complanare con il filo ha il suo centro distante  $d = 2 \text{ m}$  dal filo. I lati della spira formano un angolo  $45^\circ$  con gli assi. Nella spira circola la corrente  $I_2 = 5 A$  in senso anti-orario. Si calcoli la forza totale di Lorentz agente sulla spira.

## Soluzioni

1.

2. La legge di Faraday da

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= S_2 \frac{\Delta B_1}{\Delta t} \\ \mathcal{E} &= 4\pi k' S_2 \frac{N_1 N_2}{l} \frac{\Delta I}{\Delta t} \\ S_2 &= \frac{\mathcal{E} l}{4\pi k' N_1 N_2} \frac{\Delta t}{\Delta I} \\ S_2 &= \frac{0,2V \cdot 0,8\text{ m} \cdot 0,02\text{ sec}}{4\pi 10^{-7} N/A^2 5000 \cdot 15 A} \approx 340\text{ cm}^2\end{aligned}$$

3. Essendo campo totale inclinato di  $45^\circ$  segue che  $B_T = B_s$  e si ha

$$B_T = 4\pi k' \frac{N V}{l R} = 4\pi 10^{-7} N/A^2 \frac{20}{0,1\text{ m}} \frac{10 V}{100 \Omega} \approx 2,5\text{ Gauss}$$

4. La distanza che percorre la sbarra (rispetto all'origine del sistema di coordinate scelto) è  $x = l_1 - v \cdot t$  e si ha, nel caso di campo costante

$$\begin{aligned}S &= l(l_1 - vt) \\ d\vec{S} &= -lv dt \vec{k} \\ d\Phi &= \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bl dx = -Bv l dt \\ \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = Blv\end{aligned}$$

Quando il campo cambia nel tempo si trova

$$\begin{aligned}d\Phi &= d\vec{B} \cdot \vec{S} + \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B_0 vl \cos(\omega t) dt - l(l_1 - vt) B_0 \omega \sin(\omega t) \\ \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = Bl(v \cos(\omega t) + (l_1 - vt) \omega \sin(\omega t))\end{aligned}$$

Si potrebbe scegliere l'origine del sistema di coordinate all'altro estremo della rotaia che equivale alla scelta  $l_1 = 0$  nelle formule di sopra.5. Il campo magnetico, sul asse  $z$ , della spira è

$$B_z = \frac{2\pi k' I_1 r_1^2}{(z^2 + r_1^2)^{3/2}}$$

e la variazione del flusso nella spira piccola è

$$\begin{aligned} d\Phi &= \pi r_2^2 \frac{dB_z}{dt} = -\frac{6\pi^2 k' I_1 r_1^2 r_2^2}{(z^2 + r_1^2)^{5/2}} z dz \\ I_2 &= \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}} = -\frac{d\Phi}{\mathcal{R} dt} = -\frac{6\pi^2 k' I_1 r_1^2 r_2^2}{\mathcal{R} (z^2 + r_1^2)^{5/2}} z v \\ v &= -\frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

Per la legge di assenza di monopoli magnetici vale sempre

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Dimostriamo che il campo magnetico deve avere anche la componente radiale. Guardiamo il cilindro di lato  $dz = v dt$  il cui area è  $S_l = 2\pi r_2 dz$  e base di area  $S_b = \pi r_2^2$ . Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ 0 &= \int_{S_b} (B_{z,2} - B_{z,1}) \cdot dS_b + \int_{S_l} B_\rho dS_l \\ \pi r_2^2 dB_z &= -2\pi r_2 B_\rho dz \\ B_\rho &= -\frac{r_2 dB_z}{2 dz} \end{aligned}$$

La forza di Lorentz che agisce sulla spira piccola è

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= I_2 \int d\vec{l} \times \vec{B} \\ \vec{F}_L &= I_2 r_2 \int d\varphi B_\rho \vec{\varphi}_0 \times \vec{\rho}_0 = 2\pi r_2 I_2 B_\rho \vec{k} \\ \vec{F}_L &= \pi r_2^2 I_2 \frac{dB_z}{dz} \vec{k} = -\frac{36\pi^4 (k')^2 I_1 r_1^4 r_2^2 z^2}{\mathcal{R} (z^2 + r_1^2)^5} v \vec{k} \end{aligned}$$

La forza meccanica che si deve applicare è opposta a quella di Lorentz per poter muovere la spira piccola.

6. Il conduttore si posiziona lungo asse  $y$  e la spira a distanza  $d$  dal filo. La forza di Lorentz tra il campo prodotto dal conduttore  $B_1 = (2k' I_1/r)\vec{k}$  e la spira è

$$\vec{F}_L = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = 2k' I_1 I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{k}/r$$

Calcoliamo le forze sui lati della spira, partendo dal lato 1 parallelo all'asse  $y$  con elemento di lunghezza  $d\vec{l}_1 = dy\vec{j}$  e distante  $d$  dal asse  $y$

$$\vec{F}_{L,1} = 2k' I_1 I_2 \int_0^l \frac{dy}{d} \vec{i} = 2k' I_1 I_2 \frac{l}{d} \vec{i}$$

Nello stesso modo si calcola la forza sul lato 3 parallelo al 1. L'unica differenza è che la forza cambia verso e cambi al distanza dal asse  $y$  che diventa  $dx + l$ .

Si ha

$$\vec{F}_{L,3} = -2k' I_1 I_2 \int_0^l \frac{dy}{d+l} \vec{i} = -2k' I_1 I_2 \frac{l}{d+l} \vec{i}$$

La forza sui lati paralleli all'asse  $x$  con  $d\vec{l} = \pm dx\vec{i}$  è

$$\vec{F}_{L,2} = -2k' I_1 I_2 \int_d^{d+l} \frac{dx}{x} \vec{j} = -2k' I_1 I_2 \ln \frac{d+l}{d} \vec{j} = -\vec{F}_{L,4}$$

e la forza totale sulla spira è

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 2k' I_1 I_2 \frac{l^2}{d(d+l)} \vec{i}$$

Il flusso attraverso la spira è

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = 2k' I_1 \int_d^{d+l} \frac{dx}{x} \int_0^l dy = 2k' I_1 l \ln \frac{d+l}{d}$$

calcolando la derivata si ottiene

$$\frac{d\Phi_2}{dx} \Big|_{x=d} = 2k' I_1 l \left( \frac{1}{d+l} - \frac{1}{d} \right) = -2k' I_1 \frac{l^2}{d(d+l)}$$

e si vede che

$$F_x = -I_2 \frac{d\Phi_2}{dx} = -\frac{d(I_2 \Phi_2)}{dx}$$

Essendo la corrente  $I_2$  costante si trova la formula generale che permette di calcolare la forza attraverso il flusso

$$F_x = -\frac{d(I\Phi)}{dx}$$

Finalmente si può calcolare il coefficiente di muta induzione tra la spira ed il filo  $\Phi_2 = M_{12} I_1$  e si ha

$$M_{12} = 2k' l \ln \frac{d+l}{d}$$

7. Indicazioni: Elemento di lunghezza  $d\vec{l} = d\vec{x} + d\vec{y}$ . Si noti che gli integrali lungo asse  $y$  si cancellano tra di loro e restano solo integrali lungo  $x$ . Si posizioni sistema di coordinate in modo che il filo sia lungo asse  $y$ .

$$\vec{F} = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = -4\pi k' I_1 I_2 \ln \left( 1 - \frac{l^2}{2d^2} \right) \vec{j} = 1,6 \times 10^{-6} N \vec{j}$$

### 3.3 Magnetismo atomico

Abbiamo visto che il campo magnetico agisce sulle cariche con la forza di Lorentz.

Un elettrone che gira (in senso anti-orario) attorno al nucleo a tutti gli effetti rappresenta una spira portante la corrente  $I$ . Il momento dipolare magnetico è definito come

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j} dV = \frac{I}{2} \int \vec{r} \times d\vec{l}$$

per chiarire il fattore 1/2 calcoliamo l'area di una spira circolare

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times d\vec{l} = \frac{1}{2} \vec{r}_0 \times \vec{\varphi}_0 \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi r^2 \vec{k}$$

e si trova il risultato

$$\vec{m} = I \cdot \vec{S}$$

Per un elettrone possiamo calcolare il momento dipolare magnetico prendendo

$$\vec{j} = n q_e \vec{v}_t = \frac{1}{V} q_e \vec{\omega} \times \vec{R} \text{ e si trova}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \frac{q_e}{2} \vec{\omega} R^2 = -\frac{|q_e|}{2m} \vec{L}$$

dove  $L = \mathcal{I} \omega$  è momento angolare dell'elettrone e  $\mathcal{I} = m R^2$  momento di inerzia per la rotazione attorno al nucleo sull'orbita di raggio  $R$ . Un dipolo magnetico ha l'energia potenziale nel campo magnetico

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

e, per un elettrone che gira in senso anti-orario, si trova

$$U = \frac{|q_e|}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}$$

questo è il contributo **orbitale** all'energia potenziale. Si vede che l'energia potenziale è minima  $U \leq 0$  quando  $\vec{L} \parallel -\vec{B}$  ed è massima  $U \geq 0$  quando  $\vec{L} \parallel \vec{B}$ .

#### 3.3.1 Frequenza di Larmor

Adesso guardiamo cosa succede ad un atomo in un campo magnetico. La forza di Lorentz si aggiunge alla forza elettrica (centripeta) e la forza centrifuga per definire la traiettoria dell'elettrone attorno al nucleo. Prendiamo campo magnetico

ortogonale all'orbita dell'elettrone  $\vec{v} \perp \vec{B} = B \vec{k}$  che ruota in senso anti-orario.

$$\begin{aligned}
 0 &= \vec{F}_L + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_C \\
 \vec{F}_C &= m\omega^2 r \vec{r}_0 + q_e \vec{v} \times \vec{B} \\
 \frac{d}{d\omega} \rightarrow F_C &= m\omega^2 r + q_e \left( \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{r}_0 \\
 0 &= 2m\omega r - |q_e| \frac{d}{d\omega} \left( \vec{v}_t \times \vec{B} \right) \cdot \vec{r}_0 \\
 \left( \vec{v}_t \times \vec{B} \right) \cdot \vec{r}_0 &= r \vec{B} \cdot \vec{\omega} = r B \cdot \omega \cos(\vec{\omega} \vec{B}) = r B \omega \\
 \vec{\omega}_L &= \frac{|q_e|}{2m_e} \vec{B}
 \end{aligned}$$

si vede che l'elettrone riceve una frequenza angolare **aggiuntiva** chiamata frequenza di Larmor che ha **sempre** lo stesso verso del campo magnetico. Il modo semplice di vedere la direzione della velocità angolare di Larmor è di guardare il verso della forza di Lorentz

- quando elettrone ruota in senso anti-orario la forza di Lorentz è **attrattiva** e la forza centrifuga deve **aumentare** per mantenere l'orbita fissa dell'elettrone. Dunque, la velocità tangenziale deve aumentare

$$\omega = \omega_0 + \omega_L$$

e  $\omega_L \parallel B$

- quando elettrone ruota in senso orario la forza di Lorentz è **repulsiva** e la forza centrifuga deve **diminuire** per mantenere l'orbita fissa dell'elettrone. Dunque, la velocità tangenziale deve diminuire

$$\omega = \omega_0 - \omega_L$$

ma sempre  $\omega_L \parallel B$

Dunque, un elettrone, esposto ad un campo magnetico esterno, possiede un momento magnetico **indotto** dal campo stesso di valore

$$\vec{m}_L = -\frac{|q_e|}{2m_e} \mathcal{I} \vec{\omega}_L = -\frac{q_e^2}{4m_e} R^2 \vec{B}$$

Il momento magnetico indotto è **sempre** antiparallelo al campo magnetico (diamagnetismo). Si ha l'energia totale dell'elettrone

$$U_{tot} \equiv -\vec{m}_{tot} \cdot \vec{B} = \frac{|q_e|}{2m_e} \vec{L} \cdot \vec{B} + \frac{q_e^2 R^2}{4m_e} B^2$$

Il primo termine si chiama contributo **paramagnetico** mentre il secondo è **diamagnetico**. Diamagnetismo è sempre più debole di paramagnetismo ed è dominante solo negli atomi con  $L = 0$  (livelli pieni).



### 3.3.2 Precessione di Larmor

Abbiamo visto che un campo magnetico **ortogonale** all'orbita di un elettrone modifica la sua velocità angolare ma non il raggio dell'orbita. Consideriamo adesso un campo non ortogonale all'orbita ma formando un angolo  $\theta \neq 90^\circ$ . In questo caso il momento angolare e la velocità angolare non sono (anti)paralleli è il momento torcente  $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$  è dato da

$$\vec{\tau} = \mathcal{I} \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0 + \vec{L} \times \vec{\omega} \rightarrow \text{equazioni di Eulero}$$

ed anche quando la velocità è costante esiste un momento torcente. Questo momento provoca la precessione dell'orbita elettronica attorno alla direzione del campo magnetico. Questa si chiama **la precessione di Larmor**. Un simile comportamento ha una trottola che fa la precessione attorno alla direzione della velocità angolare dovuta al momento prodotto dal suo peso.

## 3.4 Magnetismo nucleare

Anche protoni e neutroni nel nucleo possiedono spin e si comportano come dipoli magnetici. Gli effetti magnetici dei nucleoni sono, però, molto più deboli di quelli elettronici (circa 600 volte). Questo fatto permette che le vibrazioni **termiche** possono più facilmente disallineare momenti magnetici soggetti ad un campo esterno e produrre una magnetizzazione nucleare. La risonanza magnetica è una tecnica sviluppata da E.M.Purcell di Harvard e F.Block di Stanford nel 1946 e gli è valsa il premio Nobel per la fisica. Supponiamo di voler misurare il momento magnetico del protone. Su un protone che ruota attorno ad un campo magnetico con inclinazione  $\theta$  (come una trottola) agisce il momento torcente

$$\tau = |\vec{m} \times \vec{B}| = m B \sin \theta$$

che tende di allineare momento magnetico con il campo. Avendo il protone, però, il momento angolare il campo magnetico, invece di allineare, fa cambiare la direzione al momento angolare e questo fa la precessione attorno alla direzione del campo. La frequenza angolare di precessione è quella di Larmor

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \omega_L L \sin \theta \\ \tau \equiv \frac{dL}{dt} &= |\vec{m} \times \vec{B}| = m B \sin \theta \\ \vec{\omega}_L &= \frac{m}{L} \vec{B} = \frac{q_p}{2m_e} \vec{B} \end{aligned}$$

Prendiamo un elettrone attorno al nucleo. Se riceve sufficiente energia fa il salto

$$\Delta E = \hbar \omega$$

La frequenza è quella della luce visibile. Nel caso dei protoni nel nucleo succede la stessa cosa: le differenze di energia sono più piccole e la frequenza è quella di onde radio o microonde. Il campo magnetico lungo l'asse  $z$  produce la precessione. Se si vuole cambiare l'angolo di inclinazione rispetto all'asse  $z$  bisogna applicare un altro campo lungo l'asse  $x$ . Se si disturba un protone che ruota con  $\omega_L$  con un campo di disturbo oscillante con una (radio) frequenza  $\omega$  ed ortogonale al campo statico  $B$  si può verificare la **risonanza** quando  $\omega = \omega_L$ . A questo punto molti protoni assorbono energia e ribaltano il suo spin. Il campo di disturbo è molto debole (qualche gauss) rispetto al campo statico (0,5 – 1 T). Un rilevatore di risonanza (oscilloscopio) permette di verificare le condizioni di risonanza. Misurando  $\omega$  e  $B$  si può determinare il momento magnetico del protone ( $m_p = 1,41 \times 10^{-26} \text{ A/m}^2$ )

### 3.4.1 Risonanza magnetica in medicina

L'osservabile fisica macroscopica è la magnetizzazione, definita come il momento di dipolo magnetico per unità di volume

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{V}$$

La magnetizzazione  $M$ , prodotta dall'azione del campo magnetico sugli spin nucleari, è proporzionale a quella dell'eccesso di spin con verso parallelo al campo applicato  $\uparrow\uparrow$ . È così possibile ottenere, da una piccola quantità di materia una magnetizzazione misurabile dovuta agli spin dei nuclei contenuti nella materia. Si usa il nucleo dell'idrogeno (il protone). Esso rappresenta una corrente nucleare che possiede un momento magnetico  $m$ . Anche  $H_2$  (il nucleo del deuterio, isotopo dell'idrogeno),  $C_{13}$ ,  $F_{19}$ ,  $P_{31}$ ,  $Ca_{43}$  e molti altri nuclei hanno  $m \neq 0$ . Ma normalmente si considera il protone, in quanto presente in grandi quantità nei tessuti umani. Per misurare  $M$  occorre perturbare il sistema dal suo stato di equilibrio, ad esempio applicando un secondo campo magnetico  $B_{pert}$  perpendicolare a  $B_0$  e variabile nel tempo (può essere prodotto da un segnale a radiofrequenze). I campi  $B_0$  e  $B_{pert}$  si chiamano campo di **polarizzazione** e campo di **eccitazione**. Una volta spento  $B_{pert}$ , il sistema di spin cede l'eccesso di energia al reticolo e si ristabilisce l'equilibrio tra spin degli atomi del campione e campo  $B_0$ . Se un nucleo è immerso in un campo magnetico  $B_0$ , il vettore  $\vec{m}$  tende a orientarsi parallelamente a  $B_0$ , compiendo un moto di precessione con una frequenza di precessione di Larmore  $\omega_L$ . Un campo elettromagnetico variabile, della stessa frequenza  $\omega_L$ , che interagisca con il protone che subisce il moto di precessione, darà luogo a un fenomeno di **risonanza** e il campo a radiofrequenza potrà cedere al protone l'energia necessaria a "rovesciare" il moto di precessione. Il protone a questo punto può ritornare nello stato di partenza  $\uparrow\uparrow$  (minima energia), emettendo un fotone di energia pari a quella che gli ha permesso di passare dallo stato  $\uparrow\uparrow$  a quello  $\uparrow\downarrow$  emettendo una radiazione elettromagnetica di frequenza  $\omega_0$ . Il debole segnale emesso dai protoni che ritornano alle condizioni iniziali è rivelato da un opportuno

ricevitore. In questo modo è possibile ricostruire la “mappa”, anche tridimensionale, della distribuzione dei protoni nei tessuti, e quindi negli organi. Se il corpo in considerazione è immerso in un campo magnetico  $B$  i momenti magnetici tenderanno ad allinearsi al campo, però la loro agitazione termica farà che, alla temperatura di circa  $T = 300 K$ , quelli con  $\uparrow\uparrow$  siano in numero leggermente più alto di quelli con  $\uparrow\downarrow$ . Il sbilancio produce una leggera magnetizzazione  $M$  del corpo.

Le componenti del vettore  $M(t)$  sono descritte con le equazioni di Bloch.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{L} \times \vec{\omega} \\ \vec{L} \times \vec{\omega}_L &= \frac{q}{2m_p} \vec{L} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \\ \frac{d\vec{m}}{dt} &= \gamma \vec{m} \times \vec{B} \\ \frac{d\vec{M}}{dt} &= g\gamma \vec{M} \times \vec{B}\end{aligned}$$

dove  $\gamma$  è una costante chiamata rapporto giromagnetico. Per gli elettroni sarebbe  $\gamma = q/2m_p$ , ma per il nucleo si trova  $g \approx 2\gamma$ . Questa differenza riguarda il contributo dello **spin nucleare** al momento magnetico.

Le equazioni delle componenti sono

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= g\gamma(M_y B_z - M_z B_y) \\ \frac{dM_y}{dt} &= g\gamma(M_z B_x - M_x B_z) \\ \frac{dM_z}{dt} &= g\gamma(M_x B_y - M_y B_x)\end{aligned}$$

Consideriamo un campo magnetico statico che scegliamo lungo l'asse  $z$  ( $B_x = B_y = 0$ ), e le equazioni si semplificano:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= g\gamma M_y B_z \\ \frac{dM_y}{dt} &= -g\gamma M_x B_z \\ \frac{dM_z}{dt} &= 0\end{aligned}$$

La terza di queste equazioni da  $M_z = \text{const.}$ . Derivando la prima rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{d^2 M_x}{dt^2} = -g^2 \gamma^2 B_z^2 M_x$$

Questa è un'equazione differenziale omogenea. La magnetizzazione è scelta inizialmente ( $M_y(t=0) = 0$ ) lungo l'asse  $y$ . Con queste condizioni iniziali, le soluzioni sono

$$\begin{aligned}M_x &= M_{x0} \cos \omega_0 t \\M_y &= -M_{x0} \sin \omega_0 t \\M_z &= M_0 \\ \omega_0 &= g\gamma B_z\end{aligned}$$

Le equazioni del moto descrivono la precessione della magnetizzazione attorno all'asse del campo magnetico (assunto lungo la direzione  $z$ ).

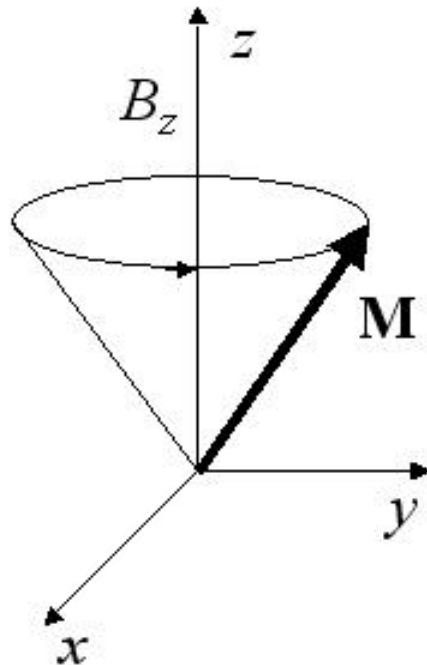


Figure 16:

Le relazioni precedenti sono incomplete, perché ignorano gli scambi di energia e momento che possono avvenire fra il sistema dei dipoli magnetici che dà origine alla magnetizzazione macroscopica. Questi scambi di energia e momento tendono sempre a riportare la magnetizzazione ad un valore corrispondente a quello di equilibrio termico con l'ambiente circostante. Questi processi spontanei che ripristinano i valori di equilibrio termico sono indicati con il termine di "rilassamento" (smorzamento). Si possono includere gli effetti del rilassamento

aggiungendo dei termini

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= g\gamma(M_y B_z - M_z B_y) - \frac{M_x}{T_2} \\ \frac{dM_y}{dt} &= g\gamma(M_z B_x - M_x B_z) - \frac{M_y}{T_2} \\ \frac{dM_z}{dt} &= g\gamma(M_x B_y - M_y B_x) - \frac{M_z - M_0}{T_1}\end{aligned}$$

Le soluzioni sono

$$\begin{aligned}M_x &= M_{x0} e^{-t/T_2} \cos \omega_0 t \\ M_y &= -M_{x0} e^{-t/T_2} \sin \omega_0 t \\ M_z &= M_0 (1 - e^{-t/T_1})\end{aligned}$$

La costante di tempo  $T_1$ , che governa il ritorno all'equilibrio della componente longitudinale del vettore  $M$ , è definita tempo di rilassamento spin-reticolo, perché coinvolge scambio di energia tra il sistema di spin ed il resto dell'ambiente. La costante di tempo  $T_2$ , che governa l'annullamento della componente trasversale del vettore  $M$ , si definisce tempo di rilassamento spin-spin in dipende dalle interazioni tra i momenti magnetici dei singoli nuclei che porta gli spin a perdere coerenza e a sfasarsi. Il tempo di rilassamento  $T_2$  è sempre minore o uguale a  $T_1$ . Una volta terminata l'azione perturbante del campo  $B_{pert}$ , dopo un tempo di applicazione  $T_p$ , la magnetizzazione macroscopica  $M$  si riallinea al campo  $B_0$ . Il segnale prodotto dalla variazione nel tempo del vettore  $M$  viene misurato in laboratorio usando una bobina ad induzione elettromagnetica posta attorno al campione in direzione ortogonale al campo esterno, che si comporta come una antenna: le variazioni della componente trasversale di  $M$  inducono una piccola forza elettromotrice (misurabile tramite un ricevitore a radiofrequenza) che oscilla alla frequenza di Larmor.

## 4 Moto ondulatorio

Moto ondulatorio si può visualizzare come il movimento di una forma che si sposta nello spazio. Il modo semplice di visualizzare un'onda è di partire da un oscillatore armonico descritto dalla equazione

$$a(t) \equiv \ddot{x} = -\omega^2 x(t)$$

che ha le soluzioni, con le condizioni iniziali  $(x_0, v_0 = 0)$ ,

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \cos(\omega t) \\ v(t) \equiv \dot{x} &= -\omega x_0 \sin(\omega t)\end{aligned}$$

Il moto ondulatorio di un'onda è sempre oscillatorio soltanto le oscillazioni avvengono sia nel tempo che nello **spazio**. In altre parole un onda si **propaga** nello spazio mentre compie oscillazioni nel tempo. Dunque, consideriamo due oscillatori armonici, uno oscilla temporalmente e l'altro spazialmente, descritti dalle equazioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) &= -\omega^2 y(x, t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) &= -k^2 y(x, t)\end{aligned}$$

sottraendo le due equazioni si arriva al

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = - \left( k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) y(x, t)$$

se si impone la condizione detta **relazione di dispersione**

$$k^2 - \omega^2/v^2 = 0$$

si arriva all'equazione di un onda in **una** dimensione

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 0} \quad (12)$$

che ha la soluzione matematica generale

$$y(x, t) = A e^{i(kx \pm \omega t)} + B e^{i(kx \mp \omega t)}$$

le costanti d'integrazione  $A, B$  si determinano dalle **condizioni iniziali**

$$y(0, 0) = A + B, \quad \dot{y}(0, 0) = i\omega (A - B).$$

Le caratteristiche principali di un onda sono:

- la sua **lunghezza d'onda**  $\lambda$ , definita come *la distanza tra due massimi o due minimi successivi*
- e la sua **frequenza**  $\nu$  definita come *numero di oscillazioni in un unità di tempo*

$$\nu = \frac{1}{T}$$

La relazione di base tra di loro è

$$\lambda \cdot \nu = v_f$$

Coefficiente  $k$  si chiama **vettore d'onda** di modulo

$$|k| = 2\pi/\lambda$$

e  $\omega$  si chiama la **frequenza angolare**

$$\omega = 2\pi \nu = 2\pi/T$$

Consideriamo un caso semplice di un'onda sinusoidale nel momento di tempo iniziale  $t = 0$ , con  $B = 0$ .

$$y(x, 0) = A \sin(kx)$$

e dopo un tempo  $t = 0.25$  sec

$$y(x, 0.25) = A \sin(kx - 0.25\omega)$$

il grafico di queste funzioni è dato dalla figura 17. Si vede che l'onda mantiene la

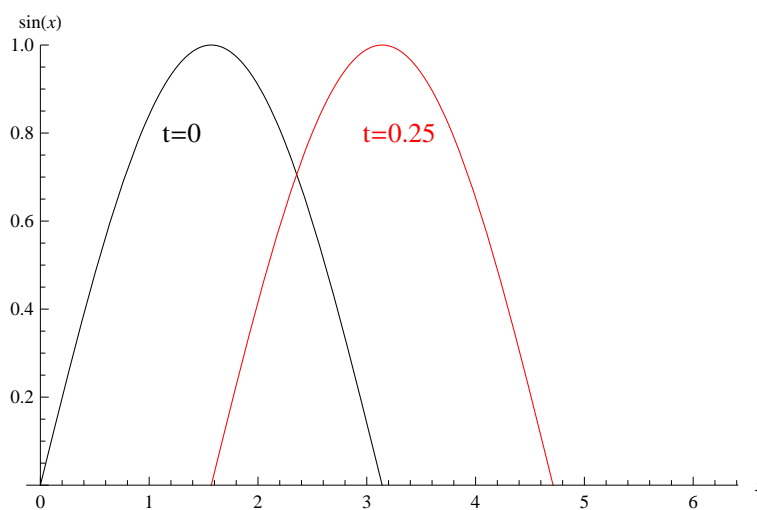


Figure 17: *Spostamento spaziale di un'onda sinusoidale*

sua **forma** nel tempo, mentre si sposta **a destra** nello spazio (per il segno + si sposterebbe a sinistra).

Nella meccanica **classica** il moto ondulatorio caratterizza la propagazione del suono, oscillazioni di una corda, propagazione della luce etc. ma non è compatibile con la descrizione del moto di una particella. In effetti, il tentativo di Newton di descrivere la luce come uno sciame di particelle **classiche** aveva fallito. Dunque, al livello classico le descrizioni particellare ed ondulare rimangono separate.

**Esercizi**

1. Si dimostri che le seguenti funzioni soddisfano l'equazione d'onda

$$\begin{aligned}
 y &= (x + vt)^3 \\
 y &= A e^{-k(x-vt)} \\
 y &= \ln k(x - vt) \\
 y &= 2 \sin(kx) \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$

**4.1 Sovrapposizione delle onde**

Dall'esperienza è noto che le due onde interferiscono tra di loro (pensare alle onde create da due sassi buttati contemporaneamente nell'acqua). La descrizione matematica è caratterizzata dal termine di interferenza ed è come segue:

Prendiamo due onde sinusoidali

$$\begin{aligned}
 y_1 &= a \sin(k_1 x - \omega_1 t) \\
 y_2 &= b \sin(k_2 x - \omega_2 t)
 \end{aligned}$$

La domanda è cosa si ottiene combinando queste due onde? Il modo più semplice di rispondere a questa domanda è di utilizzare la rappresentazione delle onde in termini di numeri complessi (vedi pre-requisiti matematici). Usando le proprietà dei numeri complessi si ricava l'ampiezza  $|z|$  e la fase  $\phi$  dell'onda risultante

$$\begin{aligned}
 |z|^2 \equiv z\bar{z} &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \cos(\phi_1 - \phi_2) \\
 \tan \phi &= \frac{|z_1| \sin \phi_1 + |z_2| \sin \phi_2}{|z_1| \cos \phi_1 + |z_2| \cos \phi_2}
 \end{aligned}$$

Consideriamo prima il caso di due onde sinusoidali di ampiezze uguali  $b = a$ . Si ottiene

$$\begin{aligned}
 y \equiv a (\sin \phi_1 + \sin \phi_2) &= 2a \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \\
 \phi &= \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}
 \end{aligned}$$



- Nel caso anche di fasi uguali  $\phi_1 = \phi_2$  si ha

$$y = 2a \sin \phi$$

$$\phi = \phi_1$$

Si tratta di interferenza **costruttiva** che da massima amplificazione di ampiezza.

- Nel caso  $\phi_1 - \phi_2 = \pi$  si ha

$$y = 0$$

$$\phi = \phi_2 + \pi/2$$

Si tratta di interferenza **distruttiva** che da zero ampiezza. Le due onde si annullano

Nel caso di due onde cosinusoidali di ampiezze uguali  $b = a$  si ottiene

$$y \equiv a (\cos \phi_1 + \cos \phi_2) = 2a \cos \left( \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \cos \left( \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right)$$

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

Si tratta di **modulazione di ampiezza** usato per trasmettere le onde radio (AM). L'onda di bassa frequenza si chiama **modulante**, mentre quella con alta frequenza si chiama **portante**.

Guardiamo in dettaglio la somma di due onde sinusoidali (per  $a=b$ )

$$y = 2a \cos \left( \frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t}{2} \right) \sin \left( \frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2} \right) \quad (13)$$

Questa è un'onda la cui ampiezza  $A = 2a \cos [(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t/2]$  **oscilla** (non è costante) e varia come un'onda. Definendo  $\omega_1 - \omega_2 = 2\Delta\omega$  e  $k_1 - k_2 = 2\Delta k$  si ottiene

$$y = 2a \cos (\Delta k x - \Delta\omega t) \sin (k_1 x - \omega_1 t)$$

Si vede che l'ampiezza si muove con la velocità  $v = \Delta\omega/\Delta k$  mentre l'onda si muove con la velocità  $v = \omega/k$ . Questo esempio dimostra che la velocità di un'onda non è definita in modo univoco. In effetti, nel caso delle onde si distinguono due tipi di velocità

1.  $v_f = \omega/k = \nu \cdot \lambda$  chiamata velocità di **fase**
2.  $v_g = d\omega/dk$  chiamata velocità di **gruppo**

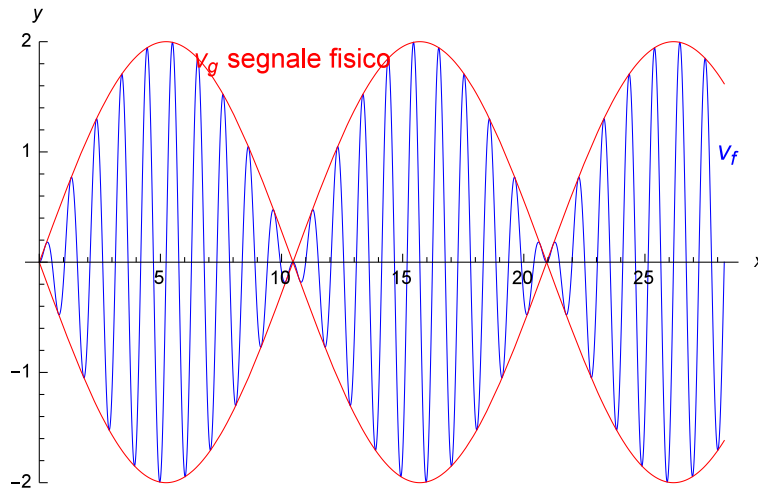


Figure 18: *Interferenza di due onde sinusoidali*  $(\sin(6.3 \cdot x + 6.1 \cdot 0)) + \sin(5.7x + 5.9 \cdot 0))/2 = \cos(0.3 \cdot x + 0.1 \cdot 0) \sin(6 \cdot x + 6 \cdot 0)$

La velocità di fase, come dice il nome, rappresenta la velocità di oscillazione della fase e non ha significato fisico. In effetti, si potrebbe considerare l'onda sulla figura 18 come un insieme di oscillatori armonici (blue in figura) che oscillano lungo asse  $y$  **senza spostarsi lungo  $x$**  creando onda rossa che comunque trasmette energia. A noi interessa come si trasmette **l'informazione ed energia** portata dall'onda. Essendo energia proporzionale al quadrato dell'ampiezza, la velocità fisica è quella di **gruppo**.

### Esercizi

1. Due onde armoniche sono

$$y_1 = 0,002 \cos(6 \cdot x - 600 \cdot t)$$

$$y_2 = 0,002 \cos(5,8 \cdot x - 580 \cdot t)$$

Trovare la formula dell'onda risultante, la velocità di fase e di gruppo. Sono dispersive o no?

2. La relazione di dispersione per le onde in acqua è

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kH)$$

con  $g$  accelerazione di gravità,  $\rho = 1\text{g/cm}^3$  densità dell'acqua,  $\gamma = 0.075\text{N/m}$  la tensione superficiale e  $H$  la frondità dell'acqua. Calcolare la velocità di gruppo in acqua alta  $kH \geq 1$  e acqua bassa  $kH \leq 1$  per piccole onde  $\lambda = 1\text{cm}$

e per grandi onde  $\lambda = 1\text{m}$ . Per quale lunghezza d'onda sono uguali la velocità di gruppo e di fase in acqua alta? Risposta:

$$v_f = \sqrt{\frac{(g + \gamma k^2/\rho)}{k} \tanh(kH)}$$

$$v_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tanh(kH)}{k(g + \gamma k^2/\rho)}} \left[ g + 3\gamma k^2/\rho + \frac{2kH(g + \gamma k^2/\rho)}{\sinh(2kH)} \right]$$

- acqua bassa  $kH \leq 1$

$$v_f = \sqrt{(g + \gamma k^2/\rho)H}$$

$$v_g = v_f \frac{g + 2\gamma k^2/\rho}{g + \gamma k^2/\rho} \rightarrow v_g \approx v_f = \sqrt{gH}$$

- acqua alta  $kH \geq 1$

$$v_f = \sqrt{(g + \gamma k^2/\rho)/k}$$

$$v_g = \frac{v_f g + 3\gamma k^2/\rho}{2(g + \gamma k^2/\rho)} \rightarrow v_g \approx \frac{v_f}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$v_f = v_g$$

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\gamma/g\rho} = 17\text{mm}$$

dai dati si trova  $\gamma/\rho = 7,5 \times 10^{-5} \text{m}^3/\text{sec}^2$  e contribuisce pochissimo per le  $\lambda$  tra cm-m.

3. Due sorgenti hanno uno sfasamento di  $\varphi_0 = Ct$  e la stessa ampiezza  $A_0$  nel punto P. Scrivere le funzioni d'onda nel punto P per ciascuna onda, supponendo che il punto è distante  $x$  dalla sorgente di un'onda e  $x + \Delta x$  dalla sorgente dell'altra onda. Trovare la funzione dell'onda risultante e dimostrare che la velocità di gruppo è la media aritmetica di due velocità di fase delle singole onde.
4. Per le particelle quantistiche vale la relazione tra l'energia e la frequenza  $E = h\nu$  ed impulso e la lunghezza d'onda  $p = h/\lambda$  (relazioni di de Broglie). Scrivere l'espressione di un'onda piana in termini di energia ed impulso di una particella. Risposta:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \frac{2\pi}{h} (\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)$$

5. Calcolare la velocità di fase e di gruppo appratente alla particella classica e quantistica. Risposta:

- classica  $E = p^2/2m$

$$v_f \equiv \omega/k = E/p = p/2m = v/2$$

$$v_g \equiv d\omega/dk = dE/dp = p/m = v$$

- quantistica  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$   
 $v_f \equiv \omega/k = E/p = mc^2/2mv = c^2/v$   
 $v_g \equiv d\omega/dk = dE/dp = pc^2/E = v$

## 4.2 Onde elettromagnetiche

Finora abbiamo considerati campi elettrici e magnetici **statici** (indipendenti dal tempo). La legge di Ampère generalizzata è il primo esempio di relazione tra campi dinamici. Le equazioni di base dell'elettromagnetismo sono le quattro equazioni di Maxwell (qui le diamo sia in forma differenziale che integrale).

Forma differenziale	Forma integrale	Nome
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$	$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = Q/\epsilon_0$	legge di Gauss
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	assenza monopoli magnetici
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$	$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\partial/\partial t \left( \int_S \vec{B} d\vec{S} \right)$	legge di Faraday
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \partial\vec{E}/c^2 \partial t$	$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left( I_{\text{reali}} + \partial \left( \int_S \vec{E} d\vec{S} \right) / c^2 \partial t \right)$	legge di Ampère

Il simbolo  $\oint_S$  rappresenta un integrale su una superficie **S chiusa** che avvolge un volume al suo interno (es. superficie di una sfera che racchiude il volume della sfera), mentre  $\int_S$  rappresenta un integrale su una superficie **aperta** racchiusa da un percorso chiuso  $\oint_C$  (una superficie delimitata da una curva chiusa).  $\rho$  rappresenta la densità di carica elettrica (sorgente del campo elettrico),  $\epsilon_0$  la costante dielettrica del vuoto,  $\mu_0$  la permeabilità magnetica del vuoto e  $\vec{j}$  la densità di corrente elettrica (sorgente del campo magnetico). Le due costanti sono legate dalla relazione

$$\frac{k'}{k} = \frac{\mu_0/4\pi}{1/4\pi\epsilon_0} = \mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

dove  $c = 3 \cdot 10^8$  m/sec rappresenta la velocità della luce.

L'operatore gradiente  $\vec{\nabla}$  agisce sui campi in modo seguente (vedere introduzione matematica sui vettori)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (14)$$

Combinando le equazioni di sopra si ottengono equazioni di secondo grado, che nel vuoto (in assenza di sorgenti) sono

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

che non sono altro che equazione delle onde in tre dimensioni. Consideriamo il caso semplice del campo elettrico che dipende solo da  $x$  come  $\vec{E}(x)$ . Equazione (15), nel vuoto, implica

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \rightarrow E_x(x) = \text{const.}$$

Ciò significa che il campo elettrico **non** è dinamico nella direzione di propagazione e oscilla **ortogonale** ad asse  $x$ . Prendiamo la sua direzione lungo asse  $y$

$$\vec{E} = E_y(x)\vec{j} \quad (15)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_y}{dt^2} = 0 \quad (16)$$

$$E_y = E_0 e^{-i(kx - \omega t)} \quad (17)$$

La soluzione è un'onda **piana** in una dimensione (asse  $y$ ). Al pari, per il campo magnetico  $\vec{B}$  troviamo (dalla legge di Faraday)

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} &= 0 \\ B_z &= B_0 e^{-i(kx - \omega t)} \end{aligned}$$

Anche  $B_z$  oscilla ortogonalmente alla direzione di propagazione (asse  $x$ ) e al campo elettrico. Questa è una proprietà generale delle onde elettromagnetiche:

**Campo magnetico e campo elettrico oscillano sempre ortogonali alla direzione di propagazione (onde trasversali) e sono ortogonali tra di loro.**

La velocità della propagazione delle onde elettromagnetiche è la velocità della luce

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec.}$$

Tipo di radiazione elettromagnetica	Frequenza	Lunghezza d'onda
Onde radio	$\leq 300 \text{ MHz}$	$\geq 1 \text{ m}$
Microonde	$300 \text{ MHz} - 300 \text{ GHz}$	$1 \text{ m} - 1 \text{ mm}$
Infrarossi	$300 \text{ GHz} - 428 \text{ THz}$	$1 \text{ mm} - 700 \text{ nm}$
Luce visibile	$428 \text{ THz} - 749 \text{ THz}$	$700 \text{ nm} - 400 \text{ nm}$
Ultravioletti	$749 \text{ THz} - 30 \text{ PHz}$	$400 \text{ nm} - 10 \text{ nm}$
Raggi X	$30 \text{ PHz} - 300 \text{ EHz}$	$10 \text{ nm} - 1 \text{ pm}$
Raggi gamma	$\geq 300 \text{ EHz}$	$\leq 1 \text{ pm}$

simboli usati sono (Peta) $\text{PHz} = 10^{15} \text{ Hz}$ , (Exa) $\text{EHz} = 10^{18} \text{ Hz}$ ,

### 4.3 Onde elettromagnetiche nella materia

La presenza della materia si evidenzia nella presenza delle cariche **di polarizzazione**  $\rho_{pol}$ , cariche **di conduzione**  $\rho_c$  (nel caso dei conduttori), dalle correnti **atomiche**  $j_{pol}$  e dalle correnti **di conduzione**  $j_c$  (trascurando le correnti atomiche) presenti nel mezzo. Per questo motivo le equazioni di Maxwell vengono modificate come segue

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0} \quad (18)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (19)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (20)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{reali} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (21)$$

dove  $\rho_{ext}$  sono le cariche **esterne** al materiale,  $\vec{j}_{reali} = \vec{j}_{ext} + \vec{j}_c$ . Correnti di **conduzione** nei metalli sono date dalla legge di Ohm  $\vec{j}_c = \sigma \vec{E}$  ( $\sigma$ -conducibilità del metallo). I campi in queste equazioni ( $\vec{D}, \vec{H}$ ) sono campi **medi macroscopici** e non quelli microscopici ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) descritti sempre dalle equazioni all'inizio del paragrafo. Relazione tra campi microscopici e quelli macroscopici sono

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

In generale  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r, \mu = \mu_0 \mu_r$  **non** sono le costanti come nel caso dei campi statici.

Le equazioni delle onde nei materiali diventano

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

La costante dielettrica relativa (chiamata anche *longitudinale*  $\epsilon_L$ ) è in generale quantità **complessa**  $\epsilon_r \equiv \epsilon_r(\omega) + i\sigma/\epsilon_0\omega = \epsilon_{1,r} + i\epsilon_{2,r}$  con  $\sigma$  la conducibilità delle cariche di conduzione. Le soluzioni sono sempre le onde piane

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t+\alpha)} \\ \vec{k}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_T(\omega) \\ v_g &\equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{v_f}{1 + \frac{1}{2} (v_f/c)^2 d\epsilon_T/d\omega}\end{aligned}$$

la relazione di dispersione è più complicata per la dipendenza delle “costanti” dalla frequenza.  $\epsilon_T = \epsilon_r \mu_r$  si chiama la costante dielettrica *trasversa*. Quando le costanti non dipendono da  $\omega$  il mezzo si chiama **non dispersivo**, altrimenti si chiama **dispersivo**.

#### 4.3.1 Teoria della dispersione

Spiegazione della dipendenza del  $\epsilon_r$  da  $\omega$  è basata sul comportamento degli elettroni in un materiale esposti ad azione di un campo esterno (modello di Lorentz) .

Abbiamo già visto il comportamento nel caso di conduttori quando abbiamo calcolato la velocità di deriva. Adesso guardiamo la situazione in generale, inclusi anche dielettrici. Gli elettroni oscillano causa forza di richiamo degli atomi, come oscillatori **classici smorzati** soggetti alla forza esterna prodotta dal campo elettrico  $\vec{E}$  secondo l'equazione

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \dot{x} = \frac{q_e}{m_e} E_0 e^{i\omega t}$$

che ha soluzione particolare

$$x = \frac{q_e}{m_e} \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} e^{i\omega t}$$

Nei dielettrici (isolanti) il campo elettrico **polarizza** gli atomi spostando i baricentri delle cariche positive e negativa, creando dipoli elettrici. Il momento di un dipolo elettrico è

$$\vec{p} = q_e \vec{x}$$

mentre la **polarizzazione** (effetto dipolare su tanti elettroni nel materiale) dipende dal campo esterno

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \epsilon_0 \chi \vec{E} \\ \vec{P} &\equiv n_k \vec{p}_k = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}\end{aligned}$$

dove la costante  $\chi$  si chiama **suscetibilità** elettrica  $\chi = \epsilon_r - 1$  dando la “costante” relativa

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_k \frac{n_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega} = \text{Re } \epsilon_r(\omega) - i \frac{\sigma(\omega)}{\epsilon_0 \omega}$$

dove  $n_k$  rappresenta numero di elettroni per unità di volume con la frequenza naturale  $\omega_k$  e fattore smorzamento  $\gamma_k$ .

### 4.3.2 Onde piane nei non-conduttori

I mezzi non-conduttori hanno  $\sigma = 0$  e la costante  $\epsilon_r$  è reale. Quando  $\epsilon_r$  **non** dipende da  $\omega$  il mezzo si chiama **non dispersivo** (materiali dielettrici normali), altrimenti si chiama **dispersivo**.

In generale la soluzione è una sovrapposizione delle onde piane di diversi numeri d'onda  $k$ . Il fronte d'onda è rappresentato dal piano

$$\begin{aligned} \vec{k} \vec{r} - \omega t &= \text{const.} \\ \vec{k} \vec{r} &= k r_{\parallel} \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{ik(r_{\parallel} - v_f t)} \\ v_f &= \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\text{Re } \epsilon_T}} \end{aligned}$$

Le equazioni di Maxwell implicano seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{E}_0 \vec{e}_i \frac{\partial e^{ik_j x_j}}{\partial x_i} = \vec{E}_0 e^{ik_j x_j} i \vec{e}_i k_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = i \vec{k} \vec{E} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow \vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \epsilon_T \vec{E} \\ \vec{B} &= \frac{1}{v_f} \vec{k}_0 \times \vec{E} \end{aligned}$$

Si vede che i campi sono sempre **ortogonali** tra di loro e **trasversali** rispetto a  $\vec{k} = k \vec{k}_0$  (direzione di propagazione dell'onda).

### 4.3.3 Onde piane nei metalli

Nel mezzo conduttore  $\epsilon_r$  è complessa ( $\sigma \neq 0$ ). Scriviamola così



$$\begin{aligned}
\epsilon_r &= (n + i\xi)^2 = \epsilon_{1,r} + i\epsilon_{2,r} \\
\epsilon_{1,r} &= n^2 - \xi^2 \\
\epsilon_{2,r} &= 2n\xi \\
0 &= \xi^4 + \epsilon_{1,r}\xi^2 - \epsilon_{2,r}^2/4 \\
\xi &= \sqrt{\frac{|\epsilon_r| - \epsilon_{1,r}}{2}} \\
n &= \sqrt{\frac{|\epsilon_r| + \epsilon_{1,r}}{2}}
\end{aligned}$$

$n$  si chiama **indice di rifrazione** del mezzo e  $\xi$  indice di **smorzamento**. Si tratta di un campo che si propaga ma la sua ampiezza si smorza (vedere introduzione matematica).

$$k = \frac{\omega}{c} (n + i\xi) \quad (22)$$

$$v_f = \frac{c}{n} \quad (23)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-(\omega/c)r_{\parallel}\xi} e^{-i\omega/v_f(r_{\parallel}-v_f t)+i\varphi_E} \quad (24)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-(\omega/c)r_{\parallel}\xi} e^{-i\omega/v_f(r_{\parallel}-v_f t)+i\varphi_B} \quad (25)$$

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \mu_r \epsilon_r \vec{E} \quad (26)$$

$$\vec{k}_0 \times \vec{B} = -\frac{(n + i\xi)}{c} \vec{E} \quad (27)$$

$$\vec{k}_0 \times \vec{B}_0 e^{i\varphi_B} = -\frac{|n + i\xi|}{c} \vec{E}_0 e^{i\varphi_E} e^{i\alpha} \quad (28)$$

$$\varphi_B = \varphi_E + \alpha = \varphi_E + \arctan(\xi/n) \quad (29)$$

si vede che il fattore di smorzamento induce uno sfasamento dei campi nei conduttori. Se guardiamo campo magnetico

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-(\omega/c)r_{\parallel}\xi} e^{-i\omega/v_f(r_{\parallel}-v_f(t+\alpha/\omega))+i\varphi_E}$$

vediamo che  $B$  è **ritardato** nel tempo rispetto al  $E$  di  $t_B = t_E + \alpha/\omega$ , mentre è **avanzato** nello spazio di  $r_{\parallel,B} = r_{\parallel,E} - \alpha v_f/\omega$ .

Nei metalli  $\omega_k = 0$  e il contributo maggiore è dato dalle cariche di conduzione. A

basse frequenze  $\omega \leq \gamma$ ,  $\omega \leq \sigma/\epsilon_0$  si ha

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= -i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \\ \epsilon_{2,r} &= \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0}} \\ \epsilon_{1,r} &= 0 \\ n = \xi &= \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0}}\end{aligned}$$

ampiezza dell'onda si smorza rapidamente come  $e^{-r_{||}/\delta}$  e l'onda penetra pochissimo nel metallo per una distanza  $\delta \equiv c/\omega \xi = \sqrt{2\epsilon_0 c^2/\sigma \omega}$  chiamata *skin depth*. Nel caso di rame abbiamo

$$\begin{aligned}\sigma &= 5,76 \times 10^7 (\Omega \text{ m})^{-1} \\ N &= 8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \\ m &= 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \\ \gamma &= 4,1 \times 10^{13} \text{ sec}^{-1} \\ \delta &= 6,7 \times 10^{-4} \text{ cm}\end{aligned}$$

Per le frequenze  $\nu \leq 10^{12}$  Hz (onde radio corte  $\lambda = 0,3$  mm) il rame si comporta nel regime di "basse" frequenze.

Alle frequenze alte  $\omega\tau \geq 1$  si ha

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= 1 - \frac{\sigma}{\omega^2 \epsilon_0 \tau} \\ \epsilon_{1,r} &= 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \geq 0 \\ \epsilon_{2,r} &= 0 \\ \xi &= 0 \\ n &= \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}\end{aligned}$$

$\omega \geq \omega_p$  ed il metallo diventa trasparente. Molti metalli si comportano così già nel ultravioletto e poi per raggi X.  $\omega_p^2 = \sigma/\epsilon_0 \tau$  si chiama la frequenza del plasma.

Al contrario, quando

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= 1 - \frac{\sigma}{\omega^2 \epsilon_0 \tau} \\ \epsilon_{1,r} &= 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \leq 0 \\ \epsilon_{2,r} &= 0 \\ n &= 0 \\ \xi &= \sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1}\end{aligned}$$

che da  $v_f \rightarrow \infty$  e  $e^{-i\omega/v_f(r_{\parallel} - v_f t)} = e^{i\omega t}$ . Rimane solo la dipendenza temporale. Questo è un campo che si smorza ma non si propaga. Questo si verifica nei metalli alle frequenze ottiche.

Per la regione **intermedia** di frequenze le onde si propagano nei metalli ma si smorzano. Per le superfici sottili metalli sono trasparenti anche alle frequenze ottiche. Gli occhiali per lavorare vicino agli alti forni sono coperti di uno strato di oro che trasmette bene le frequenze ottiche ma assorbe onde infrarosse.

Finalmente si può ricavare la relazione

$$\begin{aligned}\epsilon_T &= \epsilon_r \mu_r = \epsilon_r + \epsilon_r \mu_r (1 - 1/\mu_r) \\ \epsilon_T &= \epsilon_r + \frac{k^2 c}{\omega} (1 - 1/\mu_r)\end{aligned}$$

che vale nei materiali magnetici.

#### 4.4 Onde elettromagnetiche in due dimensioni

Abbiamo visto che le onde elettromagnetiche sono del tipo trasversale (oscillano ortogonalmente alla direzione di propagazione). In generale ci sono due onde una lungo asse  $y$  e l'altra lungo asse  $z$ . La loro combinazione da la polarizzazione dell'onda finale. Consideriamo due onde sinusoidali con lo sfasamento  $\alpha$

$$\begin{aligned}E_x &= A \sin(\omega t) \\ E_y &= B \sin(\omega t + \alpha)\end{aligned}$$

si ottiene

$$\left(\frac{E_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{B}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x E_y}{AB}\right) \cos \alpha = \sin^2 \alpha$$

che rappresenta un'ellipse con gli assi ruotati per un angolo  $\phi$  nel sistema  $S$ . Nel sistema  $S'$  la sua equazione è

$$\left(\frac{E'_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{E'_y}{b}\right)^2 = 1$$

il legame tra due sistemi è dato da

$$\begin{aligned}\tan \phi &= \frac{2 A B}{A^2 - B^2} \cos \alpha \\ b^2 &= \frac{2 A^2 B^2}{A^2 + B^2} \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2 A B}{A^2 + B^2}\right)^2 \sin^2 \alpha}} \\ a^2 &= \frac{2 A^2 B^2}{A^2 + B^2} \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2 A B}{A^2 + B^2}\right)^2 \sin^2 \alpha}} \\ e^2 \equiv a^2 - b^2 &= (A^2 + B^2) \sqrt{1 - \left(\frac{2 A B}{A^2 + B^2}\right)^2 \sin^2 \alpha}\end{aligned}$$

casi speciali

- $\alpha = 0, \pi$  polarizzazione **lineare**  $E_y = \pm B/A E_x$
- $\alpha = \pi/2$  polarizzazione **ellittica**  $\left(\frac{E_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{B}\right)^2 = 1$
- $\alpha = \pi/2, A = B$  polarizzazione **circolare**  $E_x^2 + E_y^2 = A^2$
- $A = B \rightarrow \theta = \pi/4$  sempre e  $b = \sqrt{2}A \sin \phi/2, a = \sqrt{2}A \cos \phi/2$

L'ultima formula permette la misura sperimentale della fase  $\alpha$ . Si misura la sezione dell'ellisse sull'asse  $x$ , che implica

$$y = 0 \rightarrow \omega t + \alpha = 0, \quad x = -A \sin \alpha \rightarrow \alpha = -\arcsin x/A.$$

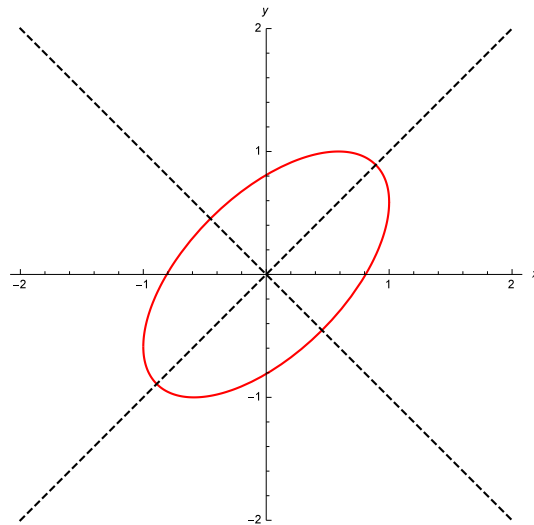


Figure 19: *Polarizzazione ellittica delle onde elettromagnetiche*

Normalmente, un'onda sinusoidale **non** trasmette un segnale fisico perché dispersa in tutto lo spazio. Per localizzare un'onda nello spazio bisogna sovrapporre onde di diverso numero d'onda  $k$ . Questo si ottiene usando la **trasformata di Fourier** (vedere l'introduzione matematica).