Esame finale di fisica corso ITS

3 Febbraio 2016

1. Usando la rappresentazione del seno e coseno in termini di numeri complessi dimostrare la formula

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

   Avendo due onde armoniche date dalle formule

$$\begin{aligned} y_1 &= 0,002\sin(6\cdot x - 600\cdot t) \\ y_2 &= 0,002\sin(5,8\cdot x - 580\cdot t) \end{aligned}$$

   trovare l'onda risultante $y = y_1 + y_2$ usando la formula di sopra.

2. Si dimostri che le seguenti funzioni

$$\begin{aligned} y =& (x + v\,t)^3 \\ y =& 2\sin(k\,x)\cos(\omega\,t) \end{aligned}$$

   soddisfano l'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

3. Dalle equazioni di Maxwell si può trovare una relazione tra il campo elettrico e magnetico come segue

$$\vec{k}_0 \times \vec{B} = -\frac{(n+i\xi)}{c}\vec{E}$$

   dove n rappresenta l'indice di rifrazione e ξ coefficiente di smorzamento e sapendo che $\vec{B} = \vec{B}_0\,e^{i\varphi_B}$, $\vec{E} = \vec{E}_0\,e^{i\varphi_E}$ e $\vec{k}_0 \times \vec{B}_0 = -\frac{|n+i\xi|}{c}\vec{E}_0$ trovare legame tra la fase φ_E del campo elettrico e la fase φ_B del campo magnetico nel mezzo conduttore.(Si intenda la relazione come relazione tra tre numeri complessi $z_1 = z_2 \cdot z_3$ e si colleghino le fasi)

4. Dimostrare che le soluzioni delle equazioni di Bloch

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= \omega_0 M_y - \frac{M_x}{T_2}\\ \frac{dM_y}{dt} &= -\omega_0 M_x B_z - \frac{M_y}{T_2}\\ \frac{dM_z}{dt} &= -\frac{M_z - M_0}{T_1}\\ \omega_0 &= g\gamma B_z\end{aligned}$$

sono

$$\begin{aligned}M_x &= M_0\, e^{-t/T_2}\, \cos\omega_0 t\\ M_y &= -M_0\, e^{-t/T_2}\, \sin\omega_0 t\\ M_z &= M_0 \left(1 - e^{-t/T_1}\right)\end{aligned}$$

usando la sostituzione $z = M_x + i\, M_y = z_0\, e^{i\alpha\, t}$ nelle prime due e la condizione iniziale $M_y(t=0) = 0$, $M_x(t=0) = M_z(t=0) = M_0$.

5. Risolvere il circuito RC composto da un condensatore di capacità $C = 470\mu\, F$, collegato in serie con $R = 10^6\,\Omega$ e alimentato da una batteria di $\mathcal{E} = 8\,V$, tenendo conto della resistenza interna $R_V = 5\times 10^5\,\Omega$ del voltmetro collegato in parallelo con il condensatore.

Soluzioni

1. Usando numeri complessi in forma di Eulero si scrive

$$\begin{aligned}e^{i\alpha} + e^{i\beta} &= e^{i[(\alpha+\beta)/2 + (\alpha-\beta)/2]} + e^{i[(\alpha+\beta)/2 - (\alpha-\beta)/2]}\\ &= 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\, e^{i(\alpha+\beta)/2}\\ \sin\alpha + \sin\beta = \mathrm{Im}\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta}\right) &= 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

Applicando la formula trovata si ha

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) &= \frac{\Delta\, k\, x - \Delta\omega\, t}{2} = \frac{1}{2}\left[6\,x - 600\,t - 5,8\,x + 580\,t\right] = 0,1\,x - 10\,t\\ \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) &= \frac{(k_1+k_2)\ x - (\omega_1+\omega_2)\ t}{2} = \frac{1}{2}\left[6\,x - 600\,t + 5,8\,x - 580\,t\right] = 5,9\,x - 590\,t\end{aligned}$$

2. Facendo le derivate parziali y', y'' rispetto al x e $\dot{y}, \ddot{y}$ rispetto a t si ha

$$\begin{aligned}
y' &= 3\,(x + v\,t)^2 \\
y'' &= 6\,(x + v\,t) \\
\dot{y} &= 3\,v\ (x + v\,t)^2 \\
\ddot{y} &= 6\,v^2\ (x + v\,t) \\
0 &= 6\ (x + v\,t) - 6\ (x + v\,t)
\end{aligned}$$

nel caso della seconda funzione si ottiene

$$\begin{aligned}
y' &= 2\,k \cos(k\,x) \cos(\omega\,t) \\
y'' &= -2\,k^2 \sin(k\,x) \cos(\omega\,t) \\
\dot{y} &= -2\,\omega \sin(k\,x) \sin(\omega\,t) \\
\ddot{y} &= -2\,\omega^2 \sin(k\,x) \cos(\omega\,t) \\
0 &= \left(k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) \sin(k\,x) \cos(\omega\,t)
\end{aligned}$$

quale si annulla grazie alla relazione di dispersione $k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$.

3.

$$\begin{aligned}
\vec{k}_0 \times \vec{B} &= |\vec{k}_0 \times \vec{B}|\, e^{i\varphi_B} \\
\frac{(n + i\xi)}{c} &= |\frac{(n + i\xi)}{c}|\, e^{i\alpha} \\
\vec{E} &= |\vec{E}| e^{i\alpha} \\
|\vec{k}_0 \times \vec{B}|\, e^{i\varphi_B} &= |\frac{(n + i\xi)}{c}||\vec{E}|\, e^{i\alpha}\, e^{i\varphi_E} \\
e^{i\varphi_B} &= e^{i(\alpha + \varphi_E)}
\end{aligned}$$

$$\varphi_B = \alpha + \varphi_E = \varphi_E + \arctan\frac{\xi}{n}$$

$$\tan\alpha = \frac{\xi}{n}$$

4. Le equazioni vengono scritte come segue

$$\begin{aligned}
0 =& \dot{z} + \left(i\omega_0 + \frac{1}{T_2}\right)\, z \\
\frac{M_0}{T_1} =& \dot{M}_z + \frac{1}{T_1}\, M_z
\end{aligned}$$

la seconda equazione si risolve prima come omogenea e poi con la soluzione particolare

$$
\begin{aligned}
0 =& \dot{M}_z + \frac{1}{T_1}\, M_z \\
M_z =& A\, e^{-t/T_1} \\
M_{z.P} =& M_0 \\
M_z(t) =& M_0 \left(1 - \, e^{-t/T_1}\right)
\end{aligned}
$$

la prima invece da

$$
\begin{aligned}
0 =& \dot{z} + \left(i\omega_0 + \frac{1}{T_2}\right)\, z \\
z =& z_0\, e^{-(i\omega_0 + 1/T_2)\, t} \\
M_x =& M_0\, e^{-t/T_2}\, \cos\, \omega_0\, t \\
M_y =& -\, M_0\, e^{-t/T_2}\, \sin\, \omega_0\, t
\end{aligned}
$$

5. Scrivendo l'equazione del circuito RC alimentato da un generatore di f.e.m. costante si ha

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} =& R\, I + \frac{Q}{C} \\
R_V\, I_V =& \frac{Q}{C} \rightarrow I_V = \frac{Q}{R_V\, C} \\
I =& I_V + I_C = \frac{Q}{R_V\, C} + \dot{Q} \\
\mathcal{E} =& R\, \dot{Q} + \frac{Q}{C}\left(1 + \frac{R}{R_V}\right)
\end{aligned}
$$

risolvendo l'omogenea si ha

$$
\begin{aligned}
0 =& R\, \dot{Q} + \frac{Q}{\tau} \\
\frac{d\, Q}{Q} =& -\, \frac{dt}{\tau} \\
Q(t) =& A\, e^{-t/\tau} \\
\tau =& \frac{R_V\, R\, C}{R + R_V} \\
Q(t) =& A\, e^{-t/\tau}
\end{aligned}
$$

La soluzione particolare è

$$Q_P = \frac{\mathcal{E}\,\tau}{R}$$

bisogna determinare la costante di integrazione A. Nell'istante iniziale $t = 0$ abbiamo $Q_0 = 0$ e la completa è le soluzioni sono

$$\begin{aligned}
Q(t) =& \frac{\mathcal{E}\,\tau}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\\
I_C(t) =& \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{-t/\tau}\\
I_V(t) =& \frac{\mathcal{E}}{R + R_V}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\\
I(t) =& \frac{\mathcal{E}}{R + R_V}\left(1 + \frac{R}{R_V}\, e^{-t/\tau}\right)
\end{aligned}$$