Esame intermedio fisica corso ITS

Gennaio 2016

Domande teoriche

1. Spiegare sfasamento della corrente rispetto alla f.e.m. in un circuito RLC usando metodo grafico di rappresentazione vettoriale dei numeri complessi (punteggio 5)

2. Usando due rappresentazioni dei numeri complessi

$$z = x + i\,y$$
$$z = |z|\,e^{i\varphi}$$

   trovare la relazione tra (x, y) e $(|z|, \varphi)$.(punteggio 5)

3. Spiegare la differenza di azione della forza di Lorentz su un elettrone e un protone che si muovono in moto circolare in senso anti-orario ed il campo magnetico è ortogonale al piano di rotazione. Da questo ragionamento si potrebbe trovare il raggio dell'orbita di una particella nel campo magnetico? (punteggio 5) (Indicazioni: Pensare perché un pianeta rimane nella sua orbita.)

Esercizi

1. Si ha una circuito con un condensatore di capacità $C = 480\mu\,F$, collegato ad una resistenza $R = 10^6\,\Omega$ e alimentato da un generatore di f.e.m. $\mathcal{E} = 8\,V\cos\left(t/\tau\right)$. Si trovino

   - il tempo caratteristico τ del circuito, la frequenza angolare ω e la frequenza ν
   - soluzioni generali $Q(t)$ e $I(t)$ in regime transitorio con la condizione iniziale $Q(0) = 0$
   - soluzioni generali $Q(t)$ e $I(t)$ nel limite $\omega \to 0$ (regime DC)

   Indicazioni: Scrivere l'equazione del circuito in termini di Q, risolvere la omogenea e aggiungere la soluzione particolare $Q_P = Re\tilde{Q}\,e^{i\omega\,t}$. Imporre le condizioni iniziali per trovare la costante d'integrazione della soluzione omogenea.(punteggio 20)

2. Nel circuito, con un condensatore $C = 2\,\mu\,F$ ed un induttanza $L = 1\,H$ in parallelo, la frequenza è $\nu = 50\,Hz$ e $\mathcal{E}_{eff} = 200\,V$. Si calcolino valori delle correnti nei rami del circuito.(punteggio 20)

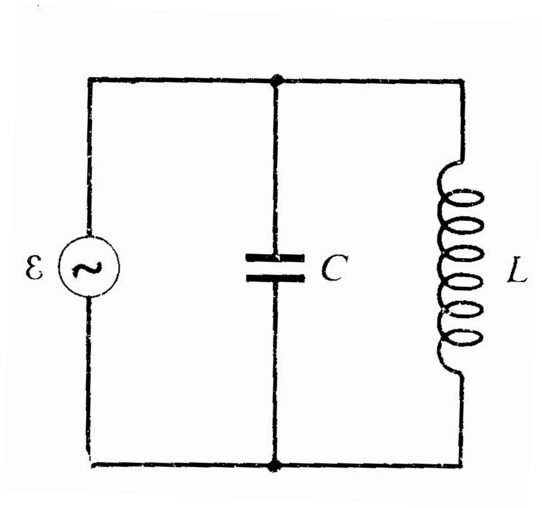

Figure 1: *Circuito LC in regime AC*

3. L'antenna di un automobile è inclinata di $\alpha = 60^0$ rispetto alla direzione di movimento (piano orizzontale). Essa taglia le linee del campo magnetico terrestre di valore $B = 0,2\,G$ e attraversa ortogonalmente l'area descritta dall'antenna in un tempo Δt. Si trovi la corrente indotta nell'antenna se questa ha una resistenza $R = 5\,\Omega$ e la sua lunghezza è $l = 1\,\mathrm{m}$. La velocità dell'automobile è $v = 60\,\mathrm{km/h}$.(punteggio 15)

4. Un protone di massa $m_p = 1,67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ e carica $q_p = 1,6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, inizialmente fermo, viene accelerato tra due piastre parallele tra le quali c'è il potenziale elettrico $V = 5 \times 10^3\,\mathrm{V}$. Successivamente il protone entra in un campo magnetico $B = 1,2\,\mathrm{T}$ perpendicolare ala sua velocità. Calcolare

   - la velocità quando entra nel campo magnetico
   - il raggio della traiettoria nel campo magnetico e la frequenza di rotazione

   (punteggio 15)

5. Tra due lunghi fili paralleli A e B, percorsi dalla corrente $I_A = 2\,\mathrm{A}$ e $I_B = 5\,\mathrm{A}$ e distanti $d = 10\,\mathrm{cm}$, è posto un terzo filo C attraversato dalla corrente (parallela alla corrente I_A) $I_C = 4\,\mathrm{A}$ e distante $x = 4\,\mathrm{cm}$ dal filo A. Calcolare la forza, per unità di lunghezza F/l, che agisce sul filo C. Considerare seguenti casi:

- le correnti nei fili A e B sono nella stessa direzione
- le correnti nei fili A e B sono nella direzione opposta
- dove bisogna posizionare il filo C per avere la forza zero su di esso?

(punteggio 15)

Soluzioni parte teorica

1. Vedere la discussione nella introduzione matematica delle lezioni sul sito. Si ha

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \mathcal{E}_0\, e^{i\omega\, t} \\
I &= \frac{\mathcal{E}_0}{|Z_{tot}|} e^{i(\omega\, t - \varphi)} \\
|Z| &= \sqrt{R^2 + (1/\omega\, C - \omega\, L)^2} \\
\tan\varphi &= \frac{\omega\, L - 1/\omega\, C}{R} \\
V_R \equiv Z_R\, I &= \frac{Z_R\, \mathcal{E}_0}{|Z_{tot}|} e^{i(\omega\, t - \varphi)} \\
V_L \equiv Z_L\, I &= \frac{|Z_L|\, \mathcal{E}_0}{|Z_{tot}|} e^{i(\omega\, t - \varphi + \pi/2)} \\
V_C \equiv Z_C\, I &= \frac{|Z_C|\, \mathcal{E}_0}{|Z_{tot}|} e^{i(\omega\, t - \varphi - \pi/2)}
\end{aligned}
$$

   Si vede che sia la corrente I, sia i potenziali V_L e V_C sono sfasati rispetto alla f.e.m., ma con le fasi diverse. Potenziale V_R è in fase con la corrente.

2. Scrivendo

$$
\begin{aligned}
z &= x + i\, y \\
z &= |z|\, e^{i\varphi} = |z|\, (\cos\varphi + i \sin\varphi)
\end{aligned}
$$

   si hanno le identificazioni

$$
\begin{aligned}
x &= |z| \cos\varphi \\
y &= |z| \sin\varphi \\
|z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
\tan\varphi &= \frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

3. La forza di Lorentz agisce nel verso opposto sugli elettroni rispetto ai protoni per via del segno della carica diverso. Se tutti due girano nel

senso anti-orario l'elettrone viene attratto verso il centro di rotazione ,mentre il protone viene allontanato. Per rimanere in orbita la forza di Lorentz **attrattiva** deve essere bilanciata dalla forza centrifuga repulsiva così che

$$\begin{aligned} F_L &= F_{cf} \\ q\,v\,B &= \frac{m\,v^2}{r} \\ r &= \frac{m\,v}{q\,B} \end{aligned}$$

Soluzioni parte numerica

1. Scrivendo l'equazione del circuito RC alimentato da un generatore di f.e.m. costante si ha

$$\mathcal{E}_0\,e^{i\omega\,t} = R\,I + \frac{Q}{C}$$

sostituendo $I = \dot{Q}$

$$\mathcal{E}_0\,e^{i\omega\,t} = R\,\dot{Q} + \frac{Q}{C}$$

L'omogenea che segue è

$$\begin{aligned} 0 =& R\,\dot{Q} + \frac{Q}{C} \\ \frac{d\,Q}{Q} =& -\frac{dt}{R\,C} \\ Q(t) =& A\,e^{-t/\tau} \\ \tau =& R\,C \end{aligned}$$

La soluzione particolare si ha dalla teoria come

$$\begin{aligned} Q_P &= Re\frac{\mathcal{E}_0\,C}{1+i\omega\,R\,C}\,e^{i\omega\,t} = Re\frac{\mathcal{E}_0\,C}{\sqrt{1+\omega^2\,R^2\,C^2}}\,e^{i(\omega\,t-\varphi)} \\ \tan\varphi &= -\omega\,R\,C \\ Q_P &= \frac{\mathcal{E}_0\,C}{\sqrt{1+\omega^2\,R^2\,C^2}}\,\cos(\omega\,t-\varphi) \end{aligned}$$

La soluzione generale è

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= A\, e^{-t/\tau} + \frac{\mathcal{E}_0\, C}{\sqrt{1+\omega^2\, R^2\, C^2}}\, \cos{(\omega\, t-\varphi)}\\
Q(0) = 0 \to A &= -\frac{\mathcal{E}_0\, C}{\sqrt{1+\omega^2\, R^2\, C^2}}\, \cos{(\varphi)}\\
Q(t) &= \frac{\mathcal{E}_0\, C}{\sqrt{1+\omega^2\, R^2\, C^2}}\, \left(\cos{(\omega\, t-\varphi)} - \cos\varphi\, e^{-t/\tau}\right)\\
I(t) &= \frac{\mathcal{E}_0\, C}{\sqrt{1+\omega^2\, R^2\, C^2}}\, \left(-\omega \sin{(\omega\, t-\varphi)} + \frac{\cos\varphi}{\tau}\, e^{-t/\tau}\right)
\end{aligned}
$$

La soluzione in regime DC si ottiene nel limite $\omega \to 0, \varphi = 0$ e si ha

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= \mathcal{E}_0\, C\, \left(1 -\, e^{-t/\tau}\right)\\
I(t) &= \frac{\mathcal{E}_0\, C}{\tau}\, e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\, e^{-t/\tau}
\end{aligned}
$$

Valori numerici sono

$$
\begin{aligned}
\tau =& R\, C = 10^6\, \Omega \cdot 480 \times 10^{-6}\, F = 480\, \frac{V}{A}\, \frac{C}{V} = 8\, \mathrm{min}\\
\omega =& \frac{1}{\tau} = 0,125\ \mathrm{min}^{-1} = 2,1 \times 10^{-3}\ \mathrm{sec}^{-1}\\
\nu =& \frac{\omega}{2\,\pi} = 3,3 \times 10^{-4}\, \mathrm{Hz}\\
\varphi =& -\pi/4\\
Q(t) =& \frac{3,84\, \mathrm{mC}}{\sqrt{2}}\, \left(\cos{(\, t/8\, \mathrm{min} + \pi/4)} - \frac{e^{-t/8\, \mathrm{min}}}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

2. Si calcola per prima l'impedenza del parallelo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Z_{LC}} &= \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = i\, \omega\, C + \frac{1}{i\, \omega\, L}\\
Z_{LC} &= \frac{i\, \omega\, L}{1 -\, \omega^2\, C\, L}\\
\omega &= 2\pi\nu = 314\, \mathrm{rad/sec}
\end{aligned}
$$

e poi si ha la corrente sul condensatore

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= Z_C\, I_C\\
I_C &= i\, \omega\, C\, \mathcal{E} = \omega\, C\, \mathcal{E}_0\, e^{i(\omega\, t + \pi/2)}\\
I_{C,eff.} &= \omega\, C\, \mathcal{E}_{eff}
\end{aligned}
$$

e sull'induttanza

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= Z_L\, I_L \\
I_L &= \frac{\mathcal{E}}{i\,\omega\, L} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega\, L}\; e^{i(\omega\, t - \pi/2)} \\
I_{L,eff.} &= \frac{\mathcal{E}_{eff}}{\omega\, L}
\end{aligned}
$$

e la corrente totale

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\mathcal{E}_0}{Z_{LC}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega\, L}\left(1 - \omega^2\, C\, L\right)\; e^{i(\omega\, t - \pi/2)} \\
I_{eff.} &= \frac{\mathcal{E}_{eff.}}{\omega\, L}\left(1 - \omega^2\, C\, L\right)
\end{aligned}
$$

3. Prima si calcola la velocità del protone quando si accelera tra le piastre parallele (un condensatore piano)

   - velocità del protone

$$
\begin{aligned}
E_k &\equiv \frac{1}{2}\, m\, v^2 = q_p \cdot V \\
v &= \sqrt{2\, q_p\, V/m} = \sqrt{2 \cdot 1,6 \times 10^{-19}\, C \cdot 5 \times 10^3\, V/1,67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}} \\
&= \sqrt{1,6 \times 10^{-15}\, J/1,67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = \sqrt{0,958 \times 10^{12}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{sec}^2} \\
&\approx 0,98 \times 10^6\,\mathrm{m/sec} \approx 10^6\,\mathrm{m/sec}
\end{aligned}
$$

   - Raggio della traiettoria

$$
\begin{aligned}
R \equiv \frac{m\, v}{q_P\, B} &= \frac{1,67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 0,98 \times 10^6\,\mathrm{m/sec}}{1,6 \times 10^{-19}\, C \cdot 1,2\, T} \\
&= 0,85 \times 10^{-2}\,\frac{N\, sec}{C\, N/A\, m} = 0,85\,\mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

4. Questo problema corrisponde alla variazione dell'area percorsa dall'antenna nel tempo dt come nelle lezioni solo che l'area di un romboide è $A = l_1\, l_2 \sin\alpha$ ed il flusso del campo magnetico è

$$
\begin{aligned}
d\Phi &= B \cdot dS = B\, l\, v\, \sin\alpha\, dt \\
\mathcal{E} &= B\, l\, v\, \sin\alpha \\
I &= \frac{B}{R}\, l\, v\, \sin\alpha = 5,7\,\mu\, A
\end{aligned}
$$

5. La forza totale è

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{F}{l}\right)_{tot.\uparrow\uparrow} &= 2\,k'\,I_C\left(\frac{I_A}{x}-\frac{I_B}{d-x}\right) = -\frac{8}{3}\times 10^{-5}\,\mathrm{N/m}\\
\left(\frac{F}{l}\right)_{tot\uparrow\downarrow} &= 2\,k'\,I_C\left(\frac{I_A}{x}+\frac{I_B}{d-x}\right) = \frac{32}{3}\times 10^{-5}\,\mathrm{N/m}
\end{aligned}
$$

per avere forza zero

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{F}{l}\right)_{tot.\uparrow\uparrow} &= 2\,k'\,I_C\left(\frac{I_A}{x}-\frac{I_B}{d-x}\right) = 0\\
x &= \frac{I_A}{I_A+I_B}d = \frac{20}{7}\,\mathrm{cm}
\end{aligned}
$$